Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

2. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Zeige, dass die Kurve $f(s) = \big(\sqrt{1+s^2}, 2s, \log(s+\sqrt{1+s^2})\big)/\sqrt{5}$ *durch Bogenlänge parametrisiert ist und berechne das begleitende Dreibein, die Krümmung und die Torsion.*

Aufgabe 2.
Sei das Paar der Funktionen $\big(x(t), y(t)\big)$ *als eine einzige Lösung der Aufgabe*

$$\begin{cases} x' = y, \\ y' = -x, \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

definiert. Zeige (ohne expliziete Darstellung $x(t) = \sin t,\ y(t) = \cos t$*!), dass für allen reellen Zahlen* s, t *das folgende gilt:*

$$\begin{aligned} x(t+s) &= x(t)y(s) + y(t)x(s), \\ y(t+s) &= y(t)y(s) - x(t)x(s). \end{aligned}$$

Aufgabe 3.
Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion. Sei ferner* $p \in \mathbb{R}^2$ *eine reguläre Nullstelle von* F*, d.h.* $F(p) = 0,\ D_pF \neq 0$.

(i) Es gibt eine Umgebung U *von* p*, so dass die Menge* $\{(x,y) \mid F(x,y) = 0\} \cap U$ *das Bild einer Kurve* $f : I \to \mathbb{R}^2$ *ist.*

(ii) Zeige: Die Krümmung von f *an der Stelle* p *ist durch die Formel*

$$\varkappa(p) = -\frac{D_p^2F\big(T(p), T(p)\big)}{D_pF\big(N(p)\big)}$$

gegeben, wobei $D_p^2(\cdot,\cdot)$ *die zweite Ableitung (Hesse-Form) von* F *an der Stelle* p *ist.*

Aufgabe 4.
Eine (reelle) Lie-Algebra ist ein $\mathbb{R}$*–Vektorraum* $\mathfrak{g}$ *zusammen mit einer Abbildung* $[\cdot,\cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ *(Lie-Klammer) mit der Eigenschaften:*

1° $[\cdot,\cdot]$ *ist bilinear;*

2° $[\cdot,\cdot]$ *ist antisymmetrisch;*

3° *Es gilt die Jacobi-Identität:*

$$\big[[u,v],w\big] + \big[[v,w],u\big] + \big[[w,u],v\big] = 0 \qquad \forall\, u,v,w \in \mathfrak{g}.$$

(i) Zeige: $\mathbb{R}^3$ *zusammen mit dem Vektorprodukt* $[\cdot,\cdot]$ *ist eine Lie-Algebra.*

(ii) Sei $\mathfrak{so}(3)$ *der Vektorraum allen schiefsymmetrieschen* 3×3*–Matrizen mit reellwertigen Einträgen. Sei die Lie-Klammer* $\{\cdot,\cdot\}$ *auf* $\mathfrak{so}(3)$ *wie folgt definiert:* $\{A,B\} = AB - BA$. *Zeige:* $\big(\mathfrak{so}(3), \{\cdot,\cdot\}\big)$ *ist eine Lie-Algebra, die zu* $\big(\mathbb{R}^3, [\cdot,\cdot]\big)$ *isomorph (als Lie-Algebra!) ist.*