Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

4. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(i) Zeige, dass der Graph der Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = |x|$ *keine glatte Teilmannigfaltigkeit ist.*

(ii) Für alle $a \in \mathbb{R}$ *entscheide, ob die Menge*

$$M_a = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = a\}$$

eine glatte Teilmannigfaltigkeit ist.

Aufgabe 2.
Sei $M_n(\mathbb{R})$ *der Vektorraum aller* $n \times n$*-Matrizen mit reellwertigen Einträgen. Zeige, dass die folgenden Teilmengen des* $M_n(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n^2}$

(i) $GL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det A \neq 0\}$

(ii) $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \mid \det A = 1\}$

(iii) $O(n) = \{A \mid A \cdot A^t = 1\}$

Teilmannigfaltigkeiten sind und berechne die Dimensionen.

Aufgabe 3. *(Rotationsflächen)*
Sei M *eine* 1*-dimensionale Teilmannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$ *mit der Eigenschaft:*

$$(x, y, z) \in M \Longrightarrow x = 0 \text{ und } y > 0.$$

Sei die Teilmenge $N \subset \mathbb{R}^3$ *wie folgt definiert:* $p \in N$ *genau dann, wenn eine Rotation* R *um die* z*-Achse existiert, so dass* $R(p) \in M$*. Zeige:* N *ist eine* 2*-dimensionale Teimannigfaltigkeit. (Insbesondere der* 2*-dimensionale Torus* $\mathbb{T}^2 = S^1 \times S^1$ *ist eine Teilmannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^3$*).*

Aufgabe 4.
Sei $B(r) \subset \mathbb{R}^n$ *der Ball vom Radius* r*. Zeige: Für beliebige* $a, b \in \mathbb{R}, 0 < a < b$*, gibt es eine glatte Funktion* $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *mit den Eigenschaften*

(i) $f(x) = 0 \ \ \forall x \in B(a)$

(ii) $f(x) = 1 \ \ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus B(b)$

(iii) $f(x) \in [0,1] \ \ \forall x \in B(b) \setminus B(a)$.

Hinweis: Betrachte die Funktion

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ e^{-1/x^2}, & x > 0 \end{cases}.$$