Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

5. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(i) *Sei* $B(r) = \{x \in \mathbb{R}^k \mid ||x|| < r\}$ *ein* k*-dimensionaler Ball. Zeige, dass* $B(r)$ *diffeomorph zu* $\mathbb{R}^k$ *ist.*

(ii) *Sei* M *eine* k*-dimensionale Mannigfaltigkeit. Zeige, dass für jeden Punkt* $m \in M$ *eine lokale Parametrisierung* $\varphi\colon \mathbb{R}^k \to M$ *existiert, die auf dem ganzen Raum* $\mathbb{R}^k$ *definiert ist.*

Aufgabe 2.
Seien $M \subset \mathbb{R}^n$ *und* $N \subset \mathbb{R}^l$ *zwei Teilmannigfaltigkeiten. Zeige, dass* $M \times N \subset \mathbb{R}^{n+l}$ *auch eine Teilmannigfaltigkeit ist. Dabei gilt:* $\dim(M \times N) = \dim M + \dim N$.

Aufgabe 3.
Sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *eine glatte Funktion und* $a \in \mathbb{R}$ *ein regulärer Wert von* f.

(i) *Beweise, dass* $M_a\colon = f^{-1}(a) \subset \mathbb{R}^n$ *eine* $(n-1)$*-dimensionale Teilmannigfaltigkeit ist, d.h.* $\forall m \in M_a$ *finde eine lokale Parametrisierung* $\varphi\colon \mathbb{R}^{n-1} \to W$*, wobei* $W \subset M_a$ *eine Umgebung von* m *ist.*

(ii) *Zeige, dass*

$$T_m M_a = \left\{ (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \frac{\partial f}{\partial x_1}(m) \cdot a_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(m) a_n = 0 \right\}.$$

(iii) *Bestimme* $T_E GL_n(\mathbb{R})$, $T_E SL_n(\mathbb{R})$ *und* $T_E O(n)$*, wobei* $E \in M_n(\mathbb{R})$ *die Identitätsmatrix ist (die Teilmannigfaltigkeiten* $GL_n(\mathbb{R}), SL_n(\mathbb{R})$ *und* $O(n)$ *sind im Übungsblatt 4, Aufgabe 2 definiert).*

Aufgabe 4.
Zeige, dass die Späre S^2 *sich mit zwei Karten überdecken lässt und finde die Koordinatenwechsel-Abbildung.*