Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

6. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Bestimme alle kritischen Punkte der Funktion

$$f\colon \mathrm{S}^2 \to \mathbb{R}, \quad f(x,y,z) = z,$$

d.h. die Punkte $m = (x_0, y_0, z_0) \in \mathrm{S}^2$, *wo* $f_*|_m$ *verschwindet.*

Aufgabe 2.
Seien M, N *glatte Teilmannigfaltigkeiten und* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung.*

(i) *Sei* M *zusammenhängend. Zeige: Verschwindet* $f_*|_m$ *an jeder Stelle* $m \in M$, *so ist* f *eine konstante Abbildung.*

(ii) *Zeige: Ist* $f_*|_m\colon T_mM \to T_{f(m)}N$ *invertierbar, so ist* f *ein lokaler Diffeomorphismus.*

(iii) *Sei* $N = \mathbb{R}$. *Zeige: Hat* f *an der Stelle* $m_0 \in M$ *ein lokales Maximum (Minimum), so ist* $f_*|_{m_0} = 0$.

Aufgabe 3.
Sei M^k *(bzw.* N^l*) eine glatte Teilmannigfaltigkeit,* $h\colon U \to \mathbb{R}^k_{x_1\dots x_k}$ *(bzw.* $k\colon V \to \mathbb{R}^l_{y_1\dots y_l}$*) eine Karte auf* M *(bzw.* N*). Sei weiter* $f\colon M \to N$ *eine glatte Abbildung, so dass gilt:* $m \in U, n = f(m) \in V$. *Bestimme die Matrix der linearen Abbildung* $f_*|_m\colon T_mM \to T_nN$ *in den Basen*

$$\Big(\frac{\partial}{\partial x_1}(m), \dots, \frac{\partial}{\partial x_k}(m)\Big) \quad \textit{und} \quad \Big(\frac{\partial}{\partial y_1}(n), \dots, \frac{\partial}{\partial y_l}(n)\Big).$$

Aufgabe 4.
Sei die Funktion $f\colon \mathrm{S}^1 \to \mathbb{R}$ *als Einschränkung der Funktion* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ *auf* S^1 *gegeben. Zeige: Die Maximum und Minimum von* f *sind Eigenwerte der Matrix*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}.$$