Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

7. Übungsblatt

Aufgabe 1. *(Lagrange-Multiplikatoren)*
Seien $f, g_1, \dots, g_m \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *glatte Funktionen, so dass die Vektoren*

$$\operatorname{grad} g_1(x), \dots, \operatorname{grad} g_m(x)$$

linear unabhängig für alle $x \in M$ *sind, wobei*

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0\}.$$

Zeige: Ist der Punkt $\bar{x} \in M$ *eine lokale Extremstelle von* f *unter den Nebenbedingungen* $g_1(x) = 0, \dots, g_m(x) = 0$*, so existiert ein* $\bar{\lambda} = (\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m) \in \mathbb{R}^m$*, so dass* $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ *ein kritischer Punkt der Funktion* $F \colon \mathbb{R}^{n+m} \to \mathbb{R}$

$$F(x, \lambda) = f(x) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x)$$

ist (vergleiche mit Aufgabe 4, Übungsblatt 6).

Aufgabe 2.
Zeige:

(i) $\mathbb{R}P^1$ *ist diffeomorph zu* S^1*;*

(ii) $\mathbb{R}P^2$ *ist nicht diffeomorph zu* S^2*.*

Aufgabe 3.
Deffiniere eine Äquivalenzrelation auf $\mathbb{R}^2$ *wie folgt:* $x \sim y \Longleftrightarrow x - y \in \mathbb{Z}^2$*.*
Zeige:

(i) Der Quotientenraum $\mathbb{R}^2/\sim$ *ist eine glatte* 2*-Mannigfaltigkeit.*

(ii) $\mathbb{R}^2/\sim$ *ist diffeomorph zum Torus* $\mathbb{T}^2$*.*

Aufgabe 4. *(Funktionenkeime)*
Sei M *eine (abstrakte) Mannigfaltigkeit,* U *eine offene Umgebung von* $m \in M$*. Bezeichne* $\mathcal{E}_m(M) = C^\infty(U)/\sim$*, wobei die Äquivalenzrelation wie folgt definiert ist:* $f \sim g \Longleftrightarrow \exists\, V \subset U$*,* V *ist offen und* $f|_V = g|_V$*.*

(i) Zeige: $\mathcal{E}_m(M)$ *ist eine* $\mathbb{R}$*-Algebra (Algebra der glatten Funktionenkeime um* m*).*

(ii) Zeige: Der Vektorraum $\mathrm{Der}(\mathcal{E}_m(M);\mathbb{R})\colon = \{D\colon \mathcal{E}_m(M) \to \mathbb{R} \mid D$ *ist* $\mathbb{R}$*-linear,* $D([f\cdot g]) = D([f])g(m)+f(m)D([g])\}$ *ist (kanonisch) isomorph zum* $\mathrm{Der}_m(C^\infty(M);\mathbb{R})$.

*(iii) *** Sei* $\mathrm{ev}\colon \mathcal{E}_m(M) \to \mathbb{R}$ *die natürliche Auswertungsabbildung:* $\mathrm{ev}([f]) = f(m)$*. Bezeichne*

$$\tilde{\mathcal{E}}_m(M) = \mathrm{Kern}(\mathrm{ev}),\ \mathcal{E}^2_m(M) = \{[f\cdot g] \mid [f] \in \tilde{\mathcal{E}}_m(M) \text{ und } [g] \in \tilde{\mathcal{E}}_m(M)\}.$$

Zeige: T_mM *ist (kanonisch) isomorph zum* $\left(\tilde{\mathcal{E}}_m(M)/\,\tilde{\mathcal{E}}^2_m(M)\right)^*$.