Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

8. Übungsblatt

Aufgabe 1.

(i) *Sei* $M^k \subset \mathbb{R}^n$ *eine Teilmannigfaltigkeit. Zeige:* TM *ist eine Teilmannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^{2n}$.

(ii) *Beschreibe das Tangentialbündel des Torus (siehe Aufgabe 3, Übungsblatt 4) als eine Teilmannigfaltigkeit des* $\mathbb{R}^6$.

Aufgabe 2.

(i) *Sei* $\mathcal{A}$ *eine* $\mathbb{R}$*-Algebra. Zeige:* $\mathrm{Der}\,(\mathcal{A}) = \{D\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A} \mid D \text{ ist } \mathbb{R}\text{-linear}, D(a \cdot b) = Da \cdot b + a \cdot Db\}$ *ist eine Lie-Algebra.*

(ii) *Zeige: Der Vektorraum* $M_n(\mathbb{R})$ *zusammen mit der Abbildung* $[\cdot,\cdot]\colon M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to M_n(\mathbb{R})$, $[A, B] = AB - BA$ *ist eine Lie-Algebra.*

(iii) *Zeige: Die folgenden Teilräume von* $M_n(\mathbb{R})$

- $\mathfrak{sl}(n;\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \mathrm{Spur}\ (\mathrm{A}) = 0\}$
- $\mathfrak{o}(n;\mathbb{R}) = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A^t = -A\}$
- $\mathfrak{u}(m;\mathbb{C}) = \{A \in M_m(\mathbb{C}) \mid \bar{A}^t = -A\} \subset M_{2m}(\mathbb{R}),\ n = 2m$

sind Lie-Teilalgebren.

Aufgabe 3.
Seien v *und* w *Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit* M.

(i) *Bestimme* $[fv, w]$ *und* $[v, fw]$*, wobei* f *eine glatte Funktion ist.*

(ii) *Sei* $k\colon U \to \mathbb{R}^n$ *eine Karte,*

$$v|_U = \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad w|_U = \sum_{i=1}^n w_i \frac{\partial}{\partial x_i}.$$

Finde die Darstellung von $[v, w]$ *in der Basis* $(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n})$.

(iii) Zeige: Die folgenden Vektorfelder auf $M = \mathbb{R}^2$

$$v(x,y) = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y} \quad \text{und} \quad w(x,y) = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y}$$

kommutieren.

Aufgabe 4.
Zeige: Es existiert keine 2-Teilmannigfaltigkeit $M \subset \mathbb{R}^3$, so dass für alle $m \in M$ gilt: $T_m M = \operatorname{span}\big(v(m), w(m)\big)$, wobei $v, w \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^3)$, $v = \frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$, $w = \frac{\partial}{\partial y}$.