Einführung in die Differentialgeometrie

Wintersemester 2007/08
Dr. A. Haydys

9. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei A eine $n \times n$-Matrix mit reellwertigen Einträgen. Das Vektorfeld $v \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ist wie folgt definiert: $v(x) = Ax \in T_x\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n, x \in \mathbb{R}^n$. Finde den Fluss von v.

Aufgabe 2.
Seien v, w Vektorfelder auf einer Mannigfaltigkeit M und $\varphi\colon M \to N$ ein Diffeomorphismus. Zeige:

$$[\varphi_* v, \varphi_* w] = \varphi_*[v, w].$$

Aufgabe 3.
Sei S der reelle Vektorraum der symmetrischen $n \times n$-Matrizen. Man hat eine Abbildung $\psi\colon \mathbb{R}P^{n-1} \to S$, die eine Gerade l auf die Orthogonalprojektion von $\mathbb{R}^n$ auf l abbildet. Zeige:

(i) Die Abbildung ψ ist durch

$$l = [x_1 : \ldots : x_n] \longmapsto (x_1, \ldots, x_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in S \subset M_n(\mathbb{R})$$

gegeben.

(ii) Das Bild von ψ ist in der Einheitssphäre von S enthalten.

(iii) Die Abbildung ψ ist eine Einbettung. (Also, ψ realisiert reellen projektiven Raum als eingebettete Teilmannigfaltigkeit eines Euklidischen Raumes.)

Aufgabe 4.
Sei das Vektorfeld $v \in \mathfrak{X}(S^3)$ durch

$$v(x) = (x_2, -x_1, x_4, -x_3) \in T_x S^3 \subset \mathbb{R}^4$$

gegeben. Zeige: Es gibt eine bijektive Abbildung zwischen der Menge aller Integralkurven von v und die 2-Sphäre S^2. (Hinweis: Diese Abbildung ist als Hopf-Abbildung oder Hopf-Faserung bekannt.)