

Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

10. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum. Zeige, dass für jedes $f \in V^* \setminus \{0\}$ eine Basis (e_1, \dots, e_n) von V existiert, so dass gilt:

$$f(x_1e_1 + \dots + x_n e_n) = x_1.$$

Aufgabe 2.

Sei $V = L(v_1, v_2) \subset \mathbb{R}^4$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 7 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Sei $\pi: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4/V$ die natürliche Abbildung.

i) Zeige, dass $\pi(w_1)$ und $\pi(w_2)$ linear abhängig in \mathbb{R}^4/V sind, wobei

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

ii) Finde eine Basis von \mathbb{R}^4/V .

Aufgabe 3.

Sei $\varphi: V \rightarrow W$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass $V/\text{Kern}(\varphi)$ isomorph zu $\text{Im } \varphi$ ist.

Aufgabe 4.

Sei $\Lambda^k V^*$ der Raum aller alternierenden k -Formen auf einem n -dimensionalen Raum V . Dann gilt:

$$\dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Aufgabe 5. *

Sei V ein endlich dimensionaler Vektorraum. Eine lineare 2-Form $\omega \in \Lambda^2 V^*$ heißt nichtausgeartet, falls gilt:

$$\text{Kern}(\omega) := \{v \in V \mid \omega(v, w) = 0 \text{ für alle } w \in V\} = \{0\}.$$

(i) Beweise, dass die Abbildung $\varphi_\omega : V \rightarrow V^*$, $(\varphi_\omega(v))(w) = \omega(v, w)$ ein Isomorphismus ist.

(ii) Zeige, dass eine Basis $\mathcal{E} = (e_1, e_2, \dots, e_{2n-1}, e_{2n})$ von V existiert, so dass gilt:

$$\omega(v, w) = x_1 y_2 - x_2 y_1 + \dots + x_{2n-1} y_{2n} - x_{2n} y_{2n-1},$$

wobei $v = x_1 e_1 + \dots + x_{2n} e_{2n}$, $w = y_1 e_1 + \dots + y_{2n} e_{2n}$. Insbesondere, $\dim V$ ist gerade.

Abgabe: bis Donnerstag, 11. Januar 2007 – 12 Uhr