Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

11. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Berechne die Determinanten:

i)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ -8 & 5 & 9 & 5 \\ -11 & 7 & 7 & 4 \end{vmatrix}$$

ii)

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 7 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 9 & 10 & 11 \\ 5 & 9 & 1 & 1 & 1 \\ 9 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

Aufgabe 2.
Sei $V = \{(x^2+1)p \mid \mathbb{R}[x] \ni p$ *ist beliebig*$\}$. *Bezeichne* $C = \mathbb{R}[x]/V$. *Zeige:*

1. $\dim C = 2$;
2. *das Produkt auf* $\mathbb{R}[x]$ *induziert ein Produkt auf* C;
3. C *ist ein Körper;*
4. C *ist isomorph (als Körper!) zu* $\mathbb{C}$.

Aufgabe 3.
Sei $A \in M_n(\mathbb{Z})$ *eine* $n \times n$*-Matrix mit ganzzahligen Einträgen. Zeige: Die Gleichung*

$$Ax = b$$

hat ganze Lösungen $x \in \mathbb{Z}^n$ *für alle ganzen* $b \in \mathbb{Z}^n$ *genau dann, wenn* $\det A = \pm 1$.

Aufgabe 4.
Die Zahlen $20604, 53227, 25755, 20927$ *und* 78421 *sind durch* 17 *teilbar. Zeige: Die Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} 2 & 0 & 6 & 0 & 4 \\ 5 & 3 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 5 & 7 & 5 & 5 \\ 2 & 0 & 9 & 2 & 7 \\ 7 & 8 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

ist auch durch 17 *teilbar.*

Aufgabe 5. *
Seien $A, B, C, D, \in M_n(K)$ *jeweils* $n \times n$*-Matrizen, so dass gilt:*

- D *ist invertierbar*
- $CD = DC$.

Dann gilt:

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \det(AD - BC).$$

Abgabe: bis Donnerstag, 18. Januar 2007 – 12 Uhr