Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

12. Übungsblatt

Aufgabe 1.

i) Zeige die Van der Monde Identität: für reelle Zahlen $x_0, \dots x_n$ *gilt*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{pmatrix} = \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

ii) Zeige mit Hilfe von i): Für beliebige verschiedene reelle Zahlen $x_0, \dots, x_n, a_0, \dots, a_n$ *existiert genau ein Polynom* $p \in \mathbb{R}[X]$ *mit den Eigenschaften:*

$$\deg p \leq n,\ p(x_0) = a_0, \dots, p(x_n) = a_n.$$

Aufgabe 2.
Bestimme das charakteristische Polynom sowie Eigenwerte und Eigenvektoren für die Matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -9 & -7 & -3 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3.
Zeige:

$$\frac{d}{dx} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \dots & f_{2n}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix} = D_1 + \dots + D_n,$$

wobei

$$D_i = \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \dots & f_{1n(}x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f'_{i1}(x) & f'_{i2}(x) & \dots & f'_{in}(x) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \dots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Aufgabe 4.

i) Finde eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, dass die vier Punkte (x_1, y_1, z_1) , (x_2, y_2, z_2) , (x_3, y_3, z_3) , (x_4, y_4, z_4) *in einer Ebene liegen.*

ii) Finde die Ebene $E \subset \mathbb{R}^3$, *die die Punkte* $(1, 1, 1)$, $(2, 3, -1)$, $(3, -1, -1)$ *enthält.*

Aufgabe 5. *

Es seien $f_1, f_2, f_3 \colon [0, 4] \to \mathbb{R}$ *stetige Funktionen, so dass* $f_i(0) = f_i(4)$ *für* $i = 1, 2, 3$. *Zeige: Für die Abbildung* $f = (f_1, f_2, f_3) = [0, 4] \to \mathbb{R}^3$ *gilt: Es gibt ein* $t \in [0, 1]$, *so dass die Punkte* $f(t), f(t + 1), f(t + 2)$ *und* $f(t + 3)$ *in einer affinen Ebene liegen. Anders formoliert: Einen runden, vierbeinigen Tisch kann man immer so drehen, dass er nicht kippelt.*

Abgabe: bis Donnerstag, 25. Januar 2007 – 12 Uhr