

Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

2. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Bestimme alle $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, die das Gleichungssystem

$$\begin{cases} x + 2z = 1 \\ y + 2z = 2 \\ 2x + z = 1 \end{cases}$$

lösen, wobei

(i) $R = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$

(ii) $R = \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

Aufgabe 2.

Zeige, dass $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ genau dann ein Körper ist, wenn p eine Primzahl ist.

Aufgabe 3.

Für ganze Zahlen $n, m \in \mathbb{Z}$ ist ein größter gemeinsamer Teiler $\text{ggT}(n, m)$ eine Zahl d_0 , so dass gilt: Für jeden gemeinsamen Teiler d von n und m (d.h. $d|n$ und $d|m$) ist d ein Teiler von d_0 . Zeige:

(i) $\text{ggT}(n, m)$ ist bis auf Vorzeichen eindeutig bestimmt. (Hinweis: Benutze die eindeutige Primfaktorzerlegung.) Ab jetzt bezeichne $\text{ggT}(n, m)$ den eindeutig bestimmten nicht negativen gemeinsamen Teiler.

(ii) $\text{ggT}(n, m) = \text{ggT}(m, n) = \text{ggT}(-n, m)$

(iii) $\text{ggT}(n, m) = \text{ggT}(n, m + xn)$ für beliebige $x \in \mathbb{Z}$

(iv) $\text{ggT}(n, 0) = |n|$

(v) Durch (ii), (iii) und (iv) ist der größte gemeinsame Teiler als Abbildung $\text{ggT}: \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ eindeutig bestimmt. (Hinweis: Beschreibe einen Algorithmus zur Bestimmung von ggT in Deutsch oder einer Programmiersprache. Erkläre warum es funktioniert)

Aufgabe 4.

Zeige, dass aus den Axiomen von Peano die Kommutativität der Addition in \mathbb{N} folgt.

Aufgabe 5. *

Für eine gegebene Primzahl p betrachten wir die Menge $R = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ mit Addition $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$ und Multiplikation $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$. Zeige:

- (i) R ist ein kommutativer Ring.
- (ii) R ist ein Körper genau dann, wenn die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ nicht lösbar ist.
- (iii) Gib je 3 Beispiele von Primzahlen für die die Gleichung $x^2 = -1$ in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ lösbar bzw. nicht lösbar ist.

Abgabe: bis Donnerstag, 02. November 2006 – 12 Uhr