Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

3. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Berechne folgende komplexe Zahlen:

(i)
$$(1+2i)(3-2i)$$

(ii)
$$\frac{5}{1-2i}$$

(iii)
$$\frac{1+4i}{2+3i}$$

(iv)
$$\frac{\cos\alpha + i\sin\alpha}{\cos\beta + i\sin\beta}$$

in der Form $a+bi$.

Aufgabe 2.
Man definiert Addition und Multiplikation von 2×2 *Matrizen mit reellwertigen Einträgen wie folgt:*

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$$

Zeige dass

(i) die Menge $M_2(\mathbb{R})$ *aller* 2×2 *Matrizen mit reellwertigen Einträgen ein Ring ist;*

(ii) die Untermenge

$$C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

ein Körper ist;

(iii) *der Körper C zu $\mathbb{C}$ isomorph ist, d.h. es existiert eine bijective Abbildung $\varphi\colon C \to \mathbb{C}$ so dass*

$$\begin{aligned}\varphi(A+B) &= \varphi(A)+\varphi(B)\\ \varphi(A\cdot B) &= \varphi(A)\cdot\varphi(B)\end{aligned}$$

für alle $A, B \in C$ gilt.

Aufgabe 3.
Bestimme alle Tripel $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$, so dass die Menge $L = \{(x,y,z,w) \in \mathbb{R}^4 \mid (x,y,z,w)$ löst das System $(*)\} \subset \mathbb{R}^4$

$$(*) = \begin{cases} x+2y+z+w = a\\ x-y-2z+w = b\\ 4x-y-5z+4x = c\end{cases}$$

ein Vektorraum ist. Finde zwei linear unabhängige Vektoren aus L.

Aufgabe 4.
Finde zwei verschiedene Polynome $p_1, p_2 \in \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}[X]$, so dass die zugehörigen Funktionen $\tilde{p}_1\colon \mathbb{Z}/7\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}, t \mapsto p_1(t)$, die durch Einsetzen von Zahlen t für die Variable X entstehen, gleich sind.

Aufgabe 5. *
Sei $R = \{a + \sqrt{3bi} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$. Zeige, dass

(i) *R ein Ring ist.*

(ii) *Jedes Element von R ist endliches Produkt von unzerlegbaren Elementen.*

(iii) *Die Zerlegung von Zahlen in R in Unzerlegbare ist nicht eindeutig.*

(Tipp: Man kann das Element $4 \in R$ in zwei verschiedenen Weisen in Unzerlegbare zerlegen.)

Abgabe: bis Donnerstag, 09. November 2006 – 12 Uhr