Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

4. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Finde eine maximale Untermenge linear unabhängiger Vektoren in S über dem gegebenen Körper.

$$K = \mathbb{R} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$K = \mathbb{C} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$K = \mathbb{Q} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$K = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \qquad S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2.
Sei V ein Vektorraum über dem Körper K. Zwei Geraden $G_1 = v_1 + Kw_1$ und $G_2 = v_2 + Kw_2$ heißen parallel, wenn w_1 und w_2 linear abhängig sind. Zeige die Äquivalenz der beiden Aussagen:

(i) *Es gibt eine eindeutig bestimmte Ebene $E \subset V$, die beiden Geraden enthält.*

(ii) *G_1 und G_2 sind parallel und nicht gleich oder aber G_1 und G_2 schneiden sich in einem Punkt.*

Aufgabe 3.
Gib eine Paramenterdarstellung von folgenden linearen Teilräumen.

(i) $\{x \in \mathbb{C}^3 \mid 3x_1 + 2ix_2 - x_3 = 0\}$

(ii) $\{x \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_4 = 0, x_1 + x_3 + x_4 = 0\}$

(iii) $\{x \in \mathbb{Q}^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\}$

(iv) $\{x \in (\mathbb{Z}/_{3\mathbb{Z}})^3 \mid \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}\}$

Aufgabe 4.
Bestimme die Schnittmenge $E \cap G$ der Ebene

$$E = (1, 2, -1) + \mathbb{R}(1, 1, 1) + \mathbb{R}(2, 1, 0)$$

mit der Geraden G :

(i) $G = (3, 3, -1) + \mathbb{R}(1, 0, -1)$

(ii) $G = (0, 1, 2) + \mathbb{R}(1, 2, 2)$

(iii) $G = (0, 1, 2) + \mathbb{R}(1, 2, 3)$

Aufgabe 5. *
Vier Schiffe A, B, C, D fahren auf einem ebenen Meer im dichten Nebel mit verschiedenen, aber konstanten Kursen und Geschwindigkeiten. Die Schiffe können sich per Funk verständigen, aber keine Position bestimmen. Der Kapitän von A erfährt von Beinahekollisionen der Schiffe B und C, der Schiffe B und D sowie der Schiffe C und D. Die Schiffe B, C und D haben Kurs und Geschwindigkeit beibehalten. Der Kapitän von A hat außerdem gesehen, wie sein Schiff beinahe mit B und beinahe mit C kollidiert wäre. Daraufhin änderte er seinen Kurs. Ist der Kapitän abergläubisch?

Abgabe: bis Donnerstag, 16. November 2006 – 12 Uhr