Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

5. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei V ein Vektorraum von endlicher Dimension n über dem endlichen Körper $\mathbb{Z}/(p)\mathbb{Z}$. Zeige: V besitzt p^n Elemente.

Aufgabe 2.
Gib Basen an für folgende Untervektorräume von $\mathbb{R}^n$

(i) $V_1 = L(M)$ *mit* $M = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$

(ii) $V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 0\}$

(iii) $V_3 = L(M)$ *mit* $M = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 7 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

Aufgabe 3.

(i) *Für eine feste Zahl $a \in \mathbb{R}$ betrachte die Funktion*

$$\begin{aligned} f_a \colon \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ t &\mapsto 2^{at} \end{aligned}$$

Zeige: Jeweils endlich viele der Funktionen $\{f_a\}_{a \in \mathbb{R}}$ sind linear unabhängig in $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

(ii) *Sei V die Menge von Funktionen*

$$V = \{g_{\lambda\alpha} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid g_{\lambda\alpha}(t) = \lambda \cos(t + \alpha), \lambda, \alpha \in \mathbb{R}\}$$

Zeige: V ist ein Untervektorraum von $Abb(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Bestimme die Dimension von V.
(Hinweis: Schulwissen anzuwenden ist nicht verboten.)

Aufgabe 4.
Seien V, W endlich dimensionale Vektorräume über einem Körper K mit Basen $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_m\}$ bzw. $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Sei $E_{ij} \colon V \to W$ die lineare Abbildung definiert durch

$$E_{ij}(e_k) = \begin{cases} f_j & \text{falls} \quad i = k \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige: $\{E_{11}, \ldots, E_{mn}\}$ ist eine Basis von $Hom(V, W)$.

Aufgabe 5. *

Sei V ein Vektorraum endlicher Dimension n über $\mathbb{Z}/(p)\mathbb{Z}$.

(i) *Wieviele Basen besitzt V?*
(Hinweis: Wie wählt man geometrisch eine Basis?)

(ii) *Wieviele k-dimensionale lineare Unterverktorräume besitzt V, wenn $k < n$ ist?*

Abgabe: bis Donnerstag, 23. November 2006 – 12 Uhr