Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

6. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei φ_A die zu einer Matrix A assoziierten linearen Abbildung. Bestimme Kern (φ_A), Bild (φ_A) und ihre Dimensionen für folgende reelle Matrizen

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 2 & -3 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 3 & 6 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 2.
Sei $x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ reelle Zahlen. Betrachte die Abbildung

$$\begin{aligned} ev\colon \mathbb{R}[X] &\to \mathbb{R}^{n+1} \\ F &\mapsto (F(x_0), \ldots, F(x_n)) \end{aligned}$$

(i) Zeige: ev ist eine lineare Abbildung.

(ii) Sei $\mathbb{R}[X]_{\leq n} = \{F \in \mathbb{R}[X] \mid \text{Grad } (F) \leq n\}$
Zeige: $\mathbb{R}[X]_{\leq n}$ ist ein Untervektorraum von $\mathbb{R}[X]$.

(iii) Zeige: $\mathbb{R}[X]_{\leq n} \xrightarrow{ev} \mathbb{R}^{n+1}$ ist ein Isomorphismus.
(Hinweis: Betrachte die Polynome

$$L_i(X) = \frac{(X - x_0)(X - x_1)\ldots(X - x_{i-1})(X - x_{i+1})\ldots(X - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1)\ldots(x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1})\ldots(x_i - x_n)})$$

(iv) Zeige: Für gegebene reelle Zahlen $y_0, \ldots, y_n$ gibt es genau ein Polynom F vom Grad $\leq n$, so dass $F(x_0) = y_0, \ldots, F(x_n) = y_n$. Gib dieses Polynom an.

Aufgabe 3.
Bestimme die Dimension vom Kern für folgende lineare Abbildungen

(i) $\varphi\colon \mathbb{R}^{1000001} \to \mathbb{R}^3$
$x \mapsto \big(\sum_{i=0}^{1000000} x_i, \sum_{i=0}^{1000000} (-1)^i x_i, \sum_{i=0}^{500000} x_{2i}\big)$.

(ii) $\frac{d}{dX}\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$, *wobei* $\frac{d}{dX}X^n = nX^{n-1}$.

(iii) $(\frac{d}{dX})^n\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$.

(iv) $\frac{d}{dX}\colon \mathbb{Z}/_{(3)}[X] \to \mathbb{Z}/_{(3)}[X]$.

Aufgabe 4.
Seien V und W Vektorräume über einen Körper K, mit geordneten Basen $\mathcal{E} = \{e_1, \dots, e_m\}$ und $\mathcal{F} = \{f_1, \dots, f_n\}$. Sei $\varphi\colon V \to W$ eine lineare Abbildung. Zeige: Die Matrixkoeffizienten φ_{ij} der Matrix $M_{\mathcal{F}}^{\mathcal{E}}(\varphi)$ sind die Koordinaten von φ bezüglich der in Aufgabe 4 Blatt 5 eingeführten Basis $\{E_{11}, \dots E_{mn}\}$ von $Hom(V, W)$.

Aufgabe 5. *
Sei φ ein Endomorphismus von V mit der Eigenschaft: Es existiert $k \in \mathbb{N}$ so dass $\varphi^k = 0$.

(i) *Zeige, dass die Abbildung $\frac{d}{dX}\colon \mathbb{R}[X]_{\leq n} \to \mathbb{R}[X]_{\leq n}$ (Vergleiche Aufgabe 2 und Aufgabe 3(ii)) sowie die Abbildung in Aufgabe 3(iv) diese Eigenschaft haben, nicht aber die Abbildung aus Aufgabe 3(ii).*

(ii) *Beweise, dass die lineare Abbildung $id + \varphi$ ein Isomorphismus von V ist.*

(iii) *Ist die lineare Abbildung $(id + \frac{d}{dX})\colon \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}[X]$ ein Isomorphismus?*

Abgabe: bis Donnerstag, 30. November 2006 – 12 Uhr