

Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

7. Übungsblatt

Aufgabe 1.

Für die lineare Abbildung

$$\begin{aligned}\varphi: \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x_1, x_2, x_3) &\rightarrow (x_1 - x_2 + 3x_3, 4x_1 + 5x_2 - 9x_3, 2x_1 + x_2 - x_3)\end{aligned}$$

bestimme man die zugeordneten Matrizen $M_{\mathcal{W}}^{\mathcal{V}}(\varphi)$ für die geordneten Basispaare

1. $\mathcal{V} = \mathcal{W} = \mathcal{E}_3$ ist die Standardbasis.

$$2. \mathcal{V} = \mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

$$3. \mathcal{V} = \mathcal{E}_3 \text{ die Standardbasis und } \mathcal{W} = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Aufgabe 2.

Löse das folgende lineare Gleichungssystem in \mathbb{R} und $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_4 - x_5 = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = -1 \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 4x_5 = 2 \\ x_1 + 5x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 6x_5 = 3 \end{cases}$$

Aufgabe 3.

In dem Diagramm von endlich dimensionalen Vektorräumen und linearen Abbildungen

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{f} & V \\ \downarrow g & \nearrow h & \\ W & & \end{array}$$

seien f und g gegeben. Man zeige: Genau dann existiert eine lineare Abbildung h mit $g = h \circ f$ wenn $\text{Kern}(f) \subset \text{Kern}(g)$ gilt. (Man sagt: g faktorisiert über f)

Aufgabe 4.

Der Kommutator zweier $n \times n$ -Matrizen A und B über einen Körper K ist definiert durch

$$[A, B] := AB - BA.$$

Betrachte die geordnete Basis

$$\mathcal{V} = \left\{ I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

des Vektorraumes $M_K(2, 2)$. Bestimme die Matrix der linearen Abbildung

$$\begin{aligned} \text{ad } U: M_K(2, 2) &\rightarrow M_K(2, 2) \\ X &\mapsto [U, X] \end{aligned}$$

bezüglich \mathcal{V} .

Aufgabe 5. *

Zeige: Das folgende Gleichungssystem von n linearen Gleichungen mit n Unbekannten hat genau eine reelle Lösung für gegebene reelle Zahlen b_1, \dots, b_n :

1. Gleichung: $2x_1 + x_2 = b_1$,

i -te Gleichung: $x_{i-1} + 2x_i + x_{i+1} = b_i$,

n -te Gleichung: $x_{n-1} + 2x_n = b_n$.

Bestimme x_n für diese Lösung.

Abgabe: bis Donnerstag, 7. Dezember 2006 – 12 Uhr