Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

8. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Sei

$$a_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, a_{n+2} = \begin{pmatrix} a_{1n+2} \\ \vdots \\ a_{nn+2} \end{pmatrix}$$

ein erzeugendes System von $\mathbb{R}^n$*. Zeige, dass die Menge der Lösungen des folgenden Systems*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}\,x_2 & + \dots + & a_{1n+2}\;x_{n+2} & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & + & a_{n2}\,x_2 & + \dots + & a_{nn+2}\;x_{n+2} & = b_n \end{cases}$$

für beliebige $b_1, \dots, b_n \in \mathbb{R}$ *eine Ebene ist.*

Aufgabe 2.
Bestimme für jedes $a \in \mathbb{R}$ *die Lösung der Gleichungssysteme*

(i)

$$\begin{cases} x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & = & 1 \\ ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \end{cases}$$

(ii)

$$\begin{cases} (a+1)x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & a^2 & + & 3a \\ x_1 & + & (a+1)x_2 & + & x_3 & = & a^3 & + & 3a^2 \\ x_1 & + & x_2 & + & (a+1)x_3 & = & a^4 & + & 3a^3 \end{cases}$$

Aufgabe 3.
Eine exakte Folge endlich dimensionaler Vektorräume ist eine Folge

$$0 \xrightarrow{\partial_{-1}} V_0 \xrightarrow{\partial_0} V_1 \to \dots \to V_n \xrightarrow{\partial_n} 0$$

von Vektorräumen und linearen Abbildungen, so dass Kern ∂_i *= Bild* ∂_{i-1} *(hier bezeichnet* 0 *den Vektorraum, der nur aus dem Nullvektor besteht.)*
Zeige: Für eine exakte Folge gilt $\sum(-1)^i \dim V_i = 0$*.*

Aufgabe 4.
Seien $f, g\colon V \to W$ *lineare Abbildungen zwischen endlich dimensionalen Vektorräumen. Dann gilt*

$$\text{Rang}\,(f+g) \leq \text{Rang}\,(f) + \text{Rang}\,(g)$$

Wann gilt Gleichheit?

Aufgabe 5. *

Sei $M \subset \mathbb{Z}^2$ *eine nichtleere endliche Teilmenge von* $\mathbb{Z}^2$. *Ein Punkt* $(a, b) \in M$ *heißt innerer Punkt, falls die im Gitter benachbarten Punkte* $(a+1, b), (a-1, b), (a, b+1)$ *und* $(a, b-1)$ *auch in* M *sind. Alle anderen Punkte heißen Randpunkte. Eine Funktion* $f\colon M \to \mathbb{R}$ *heißt harmonisch, falls für jeden inneren Punkt* (a, b) *die Gleichung*

$$f(a, b) = \frac{1}{4}(f(a+1, b) + f(a-1, b) + f(a, b+1) + f(a, b-1))$$

gilt. Zeige:

(i) *Es gilt das Maximumprinzip: Eine harmonische Funktion nimmt ihr Maximum am Rand an. Es gilt ebenfalls das Minimumprinzip.*

(ii) *Eine harmonische Funktion ist durch ihre Werte auf den Randpunkten bestimmt. Diese Randwerte können beliebig vorgegeben werden.*

Abgabe: bis Donnerstag, 14. Dezember 2006 – 12 Uhr