Übungen zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Prof. Dr. S. Bauer / A. Haydys

9. Übungsblatt

Aufgabe 1.
Betrachte den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2/\mathbb{R}\binom{1}{2}$.

i) Zeige: Die Komposition

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 &\to V \\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} &+ \mathbb{R}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ist ein Isomorphismus.

ii) Erkläre die geometrische Bedeutung von Teil (i) mit Hilfe der Zeichnung.

Aufgabe 2.
Prüfe nach, ob die folgenden Linearformen eine Basis des Dualraumes von $\mathbb{R}^3$ *bilden:*

i)

$$\begin{array}{rcrcrcr} L_1((x_1,x_2,x_3)) &=& 2x_1 &-& x_2 &+& 3x_3 \\ L_2((x_1,x_2,x_3)) &=& 3x_1 &-& 5x_2 &+& x_3 \\ L_3((x_1,x_2,x_3)) &=& 4x_1 &-& 7x_2 &+& x_3 \end{array}$$

ii)

$$\begin{array}{rcrcr} L_1'((x_1,x_2,x_3)) &=& 2x_2 &+& x_3 \\ L_2'((x_1,x_2,x_3)) &=& x_1 &+& 3x_3 \\ L_3'((x_1,x_2,x_3)) &=& 2x_1 &+& 12x_2 \end{array}$$

Aufgabe 3.
Ein Komplex endlich dimensionaler Vektorräume ist eine Folge

$$0 \xrightarrow{\partial_{n+1}} V_n \xrightarrow{\partial_n} V_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} V_{n-2} \to \dots \xrightarrow{\partial_1} V_0 \to 0$$

in der gilt $\partial_i \circ \partial_{i+1} = 0$ *für* $i = 0, 1, \dots, n$. *Die Homologieräume* H_i *sind definiert durch*

$$H_i = \textit{Kern}\ \partial_i / \textit{Bild}\ \partial_{i+1}.$$

Die Eulercharakteristik ist die Zahl

$$\mathcal{X} = \sum (-1)^i \dim V_i$$

Zeige: $\mathcal{X} = \sum(-1)^i \dim H_i$.

Aufgabe 4.
Sei V ein n-dimensionaler Vektorraum und V^* sein Dualraum. Für $W \subset V$ sei

$$W^\dagger = \{f \in V^* \mid \ \textit{Kern}\ (f) \supset W\}$$

Zeige:

i) $W^\dagger$ *ist ein Untervektorraum von* V^* *und* $\dim W + \dim W^\dagger = n$.

ii) $(W^\dagger)^\dagger = \Theta(W)$, *wobei* $\Theta\colon V \to (V^*)^*$ *der natürliche Isomorphismus aus der Vorlesung ist.*

iii) $(W_1 + W_2)^\dagger = W_1^\dagger \cap W_2^\dagger$

iv) $(W_1 \cap W_2)^\dagger = W_1^\dagger + W_2^\dagger$

Aufgabe 5. *

(i) Seien V und W endlichdimensionale Vektorräume und $\varphi \in$ Hom (V, W). Dann gilt: Die Gleichung $\varphi(x) = y$ hat eine Lösung genau dann, wenn $f(y) = 0$ für alle $f \in$ Kern φ^*.

(ii) Gilt die Aussage von (i), wenn V oder W nicht endlichdimensional sind?

Abgabe: bis Donnerstag, 21. Dezember 2006 – 12 Uhr