Lineare Algebra I

Probeklausur 1

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

14. November 2006

Nachname	Vorname

Aufgabe 1. *Entscheide, ob die folgenden Mengen Ringe sind:*

		Ja	*Nein*
(i)	$\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$		
(ii)	$\{a + b\sqrt[3]{5} + c\sqrt[3]{25} \mid a, b, c \in \mathbb{Q}\}$		
(iii)	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = -f(x)\}$		
(iv)	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(-x) = f(x)\}$		
(v)	$\{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f(0) = 1\}$		

Aufgabe 2. *Entscheide, ob die folgenden Mengen lineare Räume sind:*

		Ja	*Nein*
(i)	$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$		
(ii)	$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 = 0,\ x_2 + x_3 + x_4 = 1\}$		
(iii)	$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_i \in \mathbb{Z}, i = 1, 2, 3, 4\}$		
(iv)	$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid \textit{es gibt } i \in \{1, 2, 3, 4\},\ \textit{so dass } x_i = 0\}$		
(v)	$\{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \mid f \textit{ ist beliebig }\}$		

Aufgabe 3. *Richtig oder Falsch?*

		Richtig	*Falsch*
(i)	*Es existieren* $a, b \in \mathbb{Z}/31\mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, *so dass* $a \cdot b = 0$.		
(ii)	*Es existieren* $a, b \in \mathbb{Z}/142\mathbb{Z}$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, *so dass* $a \cdot b = 0$.		
(iii)	$\mathbb{Z}/41\mathbb{Z}$ *ist ein Körper.*		
(iv)	$3^{-1} = 4$ *in* $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.		
(v)	*Sei* $(e_1, \ldots, e_n)$ *linear abhängig. Dann kann man ein Vektor* e_{n+1} *finden, so dass das System* $(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1})$ *linear unabhängig ist.*		
(vi)	*Sei* $(e_1, \ldots, e_n)$ *linear unabhängig. Dann ist das System* $(e_1, \ldots, e_k)$ *auch linear unabhängig für alle* $k \leq n$.		
(vii)	$\mathbb{C}$ *ist ein Vektorraum über* $\mathbb{R}$.		

Aufgabe 4. *Finde alle Paare* $(z, w) \in \mathbb{C}^2$, *die das folgende System*

$$\begin{cases} (1-i)z + (1+2i)w = 1+i, \\ (1+i)z + 2w = 3, \end{cases}$$

lösen.

Aufgabe 5. *Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung*

$$z^2 - 4iz - 3 = 0.$$

Aufgabe 6. *Finde alle Lösungen der folgenden Gleichungen:*

(i) $3x = 0$ *in* $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$;

(ii) $15x = 5$ *in* $\mathbb{Z}/45\mathbb{Z}$

(iii) $8x = 12$ *in* $\mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$;

Aufgabe 7. *Sei* V *ein* $\mathbb{R}$*–Vektorraum und* $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ *ein linear unabhängiges System von Vektoren aus* V. *Finde alle* $\lambda \in \mathbb{R}$, *so dass das System*

(i) $(\lambda e_1 + e_2, e_1 + \lambda e_2)$

(ii) $(e_1 + e_2, e_2 + e_3, \ldots, e_{n-1} + e_n, e_n + \lambda e_1)$

auch linear unabhängig ist.

Aufgabe 8. *Sei* K *ein endlicher Körper. Zeige, dass ein Primzahl* $p \in \mathbb{Z}$ *existiert, so dass* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \subset K$.

Aufgabe 9. *Zeige, dass das System der Funktionen*

(i) $(1,\ \sin x,\ \cos x)$ *linear unabhängig*

(ii) $(1,\ \sin x,\ \sin x \cos x,\ \sin^2 x,\ \sin 2x,\ \sin 2x \cos 2x,\ \sin^2 2x)$ *linear abhängig*

ist.

Aufgabe 10. *Beweise, dass die Menge* $\mathbb{Q}[\sqrt{2}] = \{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Q}\} \subset \mathbb{R}$ *ein Körper ist.*