

# Lineare Algebra I

## Probeklausur 2

Wintersemester 2006/07  
Prof. Dr. S. Bauer/ Dr. A. Haydys

19. Dezember, 2006

*Bewertung:* In Aufgaben 1–4 bekommt man

- +1 für jede richtige Antwort;
- 0 für keine Antwort;
- 1 für jede falsche Antwort.

Für eine richtige (und komplette) Lösung der Aufgaben 5–11 bekommt man 4 Punkte. 25 Punkte reichen für das "Bestehen" der Probeklausur.

**Achtung:** Ergebnisse der Probeklausur sind ausschliesslich zu Ihrer Kenntniss.

**Aufgabe 1.** *Entscheide, ob die folgenden Mengen Vektorräume sind:*

		<i>Ja</i>	<i>Nein</i>
<i>(i)</i>	$\{p \in R[X] \mid p(X) = a_n X^n + \dots + a_1 X + a_0, a_n \neq 0\}$ ( <i>n ist fest</i> )		
<i>(ii)</i>	$\{p \in \mathbb{R}[X] \mid p(1) = 0\}$		
<i>(iii)</i>	$\{v \in V \mid \varphi(v) = w\}$ , $\varphi : V \rightarrow W$ ist linear und $w \in W \setminus \{0\}$		
<i>(iv)</i>	$\{v \in V \mid \varphi(v) \in W'\}$ , $\varphi : V \rightarrow W$ ist linear und $W'$ ist ein Untervektorraum von $W$		
<i>(v)</i>	$\{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid  x_1  -  x_2  +  x_3  -  x_4  = 0\}$		

**Aufgabe 2.** *Seien  $U, V, W$  lineare Räume und  $\varphi : U \rightarrow V$ ,  $\psi : V \rightarrow W$  lineare Abbildungen. Entscheide, ob die folgende Aussagen richtig oder falsch sind.*

		<i>Richtig</i>	<i>Falsch</i>
<i>(i)</i>	$\varphi$ linear $\Rightarrow \varphi$ injektiv		
<i>(ii)</i>	$\varphi$ surjektiv $\Rightarrow \dim V > \dim U$		
<i>(iii)</i>	$\psi \circ \varphi$ bijektiv $\Rightarrow \varphi$ injektiv		
<i>(iv)</i>	$\psi \circ \varphi$ bijektiv $\Rightarrow \varphi$ surjektiv		
<i>(v)</i>	$\psi \circ \varphi$ bijektiv $\Rightarrow \psi$ injektiv		

**Aufgabe 3.** Es bezeichne  $L(-)$  die lineare Hülle. Entscheide, ob die folgenden Aussagen allgemeingültig sind.

		Ja	Nein
(i)	$L(v_1, v_2) = L(v_2, v_1)$		
(ii)	$L(v_1, v_2, v_1 - 2v_2) = L(v_1, v_2)$		
(iii)	$L(v_1, v_2, v_1 + v_2) = L(v_1 + v_2)$		
(iv)	$(v_1, \dots, v_n)$ erzeugt $V \Rightarrow n = \dim V$		
(v)	$\mathcal{V} = (v_1, \dots, v_n)$ erzeugt $V$ und $\dim V \geq n \Rightarrow \mathcal{V}$ ist linear unabhängig		

**Aufgabe 4.** Sei  $V$  endlich-dimensionaler Vektorraum mit  $\dim V \geq 2$ . Entscheide, ob die folgenden Aussagen für beliebige Untervektorräume  $V_1, V_2 \subset V$  richtig sind.

		Richtig	Falsch
(i)	$V_1 \cap V_2$ ist ein Untervektorraum		
(ii)	$V_1 \cup V_2$ ist ein Untervektorraum		
(iii)	$\dim V_1 + \dim V_2 = \dim(V_1 + V_2)$		
(iv)	Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit Kern $\varphi = V_1$		
(v)	Es existiert eine lineare Abbildung $\varphi : V \rightarrow V$ mit Bild $\varphi = V_2$		

**Aufgabe 5.** Berechne die folgenden Matrizen:

$$(ii) A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{2006} ; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{2006} .$$

**Aufgabe 6.** Folgende Vektoren seien gegeben

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} ; v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} ; v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} ; w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} ; w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} ; w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} .$$

Seien  $V = L(v_1, v_2, v_3)$ ,  $W = L(w_1, w_2, w_3)$ . Bestimme Basen von  $V + W$  und  $V \cap W$  und berechne die Dimensionen dieser Räume.

**Aufgabe 7.** Seien die folgende Elemente von  $(\mathbb{R}[X]_{<2})^*$

$$f_i(p) = \int_{-1}^1 t^i p(t) dt, \quad i = 0, 1, 2.$$

gegeben. Bestimme die Basis  $(p_0, p_1, p_2)$  von  $\mathbb{R}[X]_{\leq 2}$ , so dass die duale Basis mit  $(f_0, f_1, f_2)$  übereinstimmt.

**Aufgabe 8.** Sei die Matrix  $A$  gegeben durch

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 4 \\ 2 & 6 & 10 & 8 \\ -4 & -12 & -20 & -16 \\ 3 & 9 & 15 & 12 \end{pmatrix}$$

und sei  $\varphi : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  die zugehörige lineare Abbildung.

- (i) Es gibt eine  $4 \times 1$  Matrix  $B$  und eine  $1 \times 4$  Matrix  $C$  mit  $A = BC$ . Gib solche Matrizen  $B$  und  $C$  an.
- (ii) Bestimme eine Basis des Kerns und des Bildes von  $\varphi$ .
- (iii) Berechne  $A^{2006}$ .

**Aufgabe 9.** Sei  $f, g \in V^*$  mit der Eigenschaft  $\text{Kern } f = \text{Kern } g$ . Dann unterscheiden sich  $f$  und  $g$  durch einen konstanten Faktor.

**Aufgabe 10.** Sei  $K$  ein Körper und  $M_n(K)$  der Raum allen  $n \times n$  Matrizen mit Einträgen in  $K$ . Eine Matrix  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$  heißt symmetrisch, wenn gilt:  $a_{ij} = a_{ji}$  für alle  $1 \leq i, j \leq n$ . Zeige, dass für jede lineare Abbildung  $\varphi : M_3(K) \rightarrow M_2(K)$  eine symmetrische Matrix  $A \in M_3(K) \setminus \{0\}$  existiert, so dass gilt:  $\varphi(A) = 0$ .

**Aufgabe 11.** Vier Schiffe  $A, B, C, D$  fahren auf einem ebenen Meer im dichten Nebel mit verschiedenen, aber konstanten Kursen und Geschwindigkeiten. Die Schiffe können sich per Funk verständigen, aber keine Position bestimmen. Der Kapitän von  $A$  erfährt von Beinahekollisionen der Schiffe  $B$  und  $C$ , der Schiffe  $B$  und  $D$  sowie der Schiffe  $C$  und  $D$ . Die Schiffe  $B, C$  und  $D$  haben Kurs und Geschwindigkeit beibehalten. Der Kapitän von  $A$  hat außerdem gesehen, wie sein Schiff beinahe mit  $B$  und beinahe mit  $C$  kollidiert wäre. Daraufhin änderte er seinen Kurs. Ist der Kapitän abergläubisch?