Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

31. Oktober 2006

Aufgabe 1. *Beweise, dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *das folgende gilt:*

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \ldots (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

(c) $(1+a)^n \geq 1 + na$ *für alle* $a \geq -1,\ a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2 (Fibonacci–Zahlen). *Man definiert die Folge* $F(n)$ *rekursiv wie folgt:* $F(0) = 1, F(1) = 1$ *und*

$$F(n) = F(n-1) + F(n-2) \quad \text{für } n \geq 2.$$

Beweise, dass die Formel

$$F(n) = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ *gilt.*

Aufgabe 3. *Finde alle ganzzahlige Lösungen der Gleichungen:*

(a) $48x + 36y = 20$;

(b) $60x \equiv 10 \mod 160$;

(c) $50x \equiv 30 \mod 160$;

Aufgabe 4. *Finde alle* $x \in \mathbb{Z}/20\mathbb{Z}$, *die die Gleichung* $12x = 4$ *lösen.*