Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

7. November 2006

Aufgabe 1. *Beweise, dass für alle* $n \in \mathbb{N}$ *das folgende gilt:*

(a) $1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$;

(b) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n = \frac{(n-1)n(n+1)}{3}$;

(c) $(1+a)^n \geq 1 + na$ *für alle* $a \geq -1,\ a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2.

(a) Beweise, dass die Formel $(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos(n\alpha) + i\sin(n\alpha)$ *für alle* $n \in \mathbb{N}, \alpha \in \mathbb{R}$ *gilt.*

(b) Berechne die komplexe Zahl $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^6$ *in der Form* $a + bi$.

(c) Beweise, dass die Formeln

- $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha, \quad \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha,$
- $\cos 3\alpha = \cos^3\alpha - 3\cos\alpha\sin^2\alpha, \quad \sin 3\alpha = -\sin^3\alpha + 3\cos^2\alpha\sin\alpha$

gelten.

Aufgabe 3. *Zeige, dass die komplexen Zahlen* $x_1 = 1 + i$ *und* $x_2 = 1 - i$ *die Gleichung*

$$x^2 - 2x + 2 = 0 \tag{1}$$

lösen. Hat die Gleichung (1) reelle Lösungen?

Aufgabe 4. *Finde alle komplexen Lösungen der Gleichung*

$$x^2 - 4ix - 3 = 0.$$