Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

28. November 2006

Aufgabe 1. *Sei* $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *gegeben durch*

(a) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_2 + x_3,\ 2x_1 + x_3,\ 3x_1 - x_2 + x_3)$;

(b) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1,\ x_2 + 1,\ x_3 + 2)$;

(c) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_3,\ x_3^2)$;

(d) $\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2 + x_3,\ x_2,\ x_3)$.

Ist φ *linear?*

Aufgabe 2. *Zeige, dass eine lineare Abbildung* $\varphi : V \to W$ *genau dann injektiv ist, wenn* $\ker\varphi = \{0\}$.

Aufgabe 3. *Sei* V *ein Vektorraum mit einer Basis* $\mathcal{E} = (e_1, e_2)$. *Sei*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

die Matrix von φ *in der Basis* $\mathcal{E}' = (-3e_1 + 7e_2,\ e_1 - 2e_2)$. *Finde die Matrix von* φ *in der Basis* $\mathcal{E}$.

Aufgabe 4. *Sei* V *ein* $\mathbb{R}$*–Vektorraum und* $f : V \to \mathbb{R}$ *eine lineare Funktion,* $f \neq 0$. *Zeige, dass* $V \cong \ker f \oplus \mathbb{R}w$ *für alle* $w \notin \ker f$.

Aufgabe 5. *Sei* V *ein Vektorraum mit einer Basis* $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$. *Seien auch die folgende Vektoren gegeben:*

$$\begin{aligned} a_1 &= 2e_1 + 3e_2 + 5e_3, & b_1 &= e_1 + e_2 + e_3, \\ a_2 &= e_2 + 2e_3, & b_2 &= e_1 + e_2 - e_3, \\ a_3 &= e_3, & b_3 &= 2e_1 + e_2 + 2e_3. \end{aligned}$$

Zeige, dass eine eindeutig bestimmte lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ *mit* $\varphi(a_i) = b_i$ *existiert und finde die Matrix von* φ *in der Basis* $\mathcal{E}$.