Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

5. Dezember 2006

Aufgabe 1. *Bestimme alle* $\lambda \in \mathbb{R}$, *so dass das folgende System*

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + \lambda x_2 - x_3 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 2, \end{cases}$$

eine einzige Lösung hat.

Aufgabe 2. *Definiere die Abbildung* $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *wie folgt:*

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc.$$

(i) Zeige, dass die Spaltenvektoren $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ *genau dann linear abhängig sind, wenn* $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 0$.

(ii) Zeige, dass drei Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2$ *auf eine Gerade genau dann liegen, wenn gilt:*

$$\det \begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{pmatrix} = 0.$$

(iii) Bestimme die Gleichung der Gerade, die zwei gegebene (verschiedene) Punkte $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$ *enthält.*

(iv) Bestimme die Gleichung der Gerade, die die Punkte $(1, 1), (2, 3) \in \mathbb{R}^2$ *enthält.*

Aufgabe 3. *Finde Matrix* X *aus der Gleichung*

(i) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} X \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$;

(ii) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4. *Zeige, dass das inhomogene System* $Ax = b$ *genau dann für alle* $b \in \mathbb{R}^n$ *lössbar ist, wenn das zugehörige homogene System* $Ax = 0$ *nur die triviale Lösung hat, wobei* $A \in M_n(\mathbb{R}), x \in \mathbb{R}^n$.

Aufgabe 5. *Finde ein Polynom* $p \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}[X]$ *der zweiten Ordnung mit der Eigenschaft:*

$$p(2) = 1, \; p(4) = 0, \; p(6) = 7.$$

(Vergleiche mit der Aufgabe 2, Übungsblatt 6.)