Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

12. Dezember 2006

Aufgabe 1. *Entscheide, ob die folgende Abbildungen*

$$(i)\ p \mapsto \int_{-1}^{2} p(t)\,dt \qquad (ii)\ p \mapsto \int_{-1}^{2} (p(t))^2\,dt;$$

$$(iii)\ p \mapsto \int_{-1}^{2} t^2 p(t)\,dt; \qquad (iv)\ p \mapsto \int_{-1}^{2} p(t^2)\,dt;$$

$$(v)\ p \mapsto \frac{dp}{dX}; \qquad (vi)\ p \mapsto \left.\frac{dp}{dX}\right|_{X=1}$$

Elemente von $\mathbb{R}[X]^*$ *sind.*

Aufgabe 2. *Die Menge* (v_1, v_2, v_3) *mit*

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}; \quad v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}; \quad v_3 = \begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$$

ist eine Basis von $\mathbb{R}^3$*. Sei* (f_1, f_2, f_3) *die duale Basis. Finde* $f_i(x), i = 1, 2, 3,$ *wobei* $x \in \mathbb{R}^3$.

Aufgabe 3. *Sei* V *ein* n*–dimensionaler Vektorraum. Zeige, dass für jedes* $f \in V^* \setminus \{0\}$ *eine Basis* $(e_1, \ldots, e_n)$ *von* V *existiert, so dass gilt:*

$$f(x_1e_1 + \cdots + x_ne_n) = x_1.$$

Aufgabe 4. *Sei* V *ein* $\mathbb{R}$*–Vektorraum und* $f \in V^* \setminus \{0\}$*. Zeige, dass* $V \cong \operatorname{Kern} f \oplus \mathbb{R}w$ *für alle* $w \notin \operatorname{Kern} f$.

Aufgabe 5. *Sei* $f, g \in V^*$ *mit der Eigenschaft* $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Kern} g$*. Dann* f *und* g *unterscheiden sich durch einen konstanten Faktor.*

Aufgabe 6. *Sei* $f, g \in V^*$ *mit der Eigenschaft* $f(x) \cdot g(x) = 0$ *für alle* $x \in V$*. Dann gilt:* $f = 0$ *oder* $g = 0$.

Aufgabe 7. *Sei* $\dim V = n$. *Die folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $f_1, \ldots, f_n \in V^*$ *sind linear unabhängig;*

(ii) $\mathrm{Kern}\, f_1 \cap \cdots \cap \mathrm{Kern}\, f_n = \{0\}$.

Aufgabe 8. *Sei* $Gr_k(V)$ *die Menge allen* k*–dimensionalen Untervektorräumen von* V. *Zeige, dass zwischen der folgenden Mengen*

(i) $Gr_1(V^*)$ *und* $Gr_{n-1}(V)$

(ii) $Gr_k(V^*)$ *und* $Gr_{n-k}(V)$

eine bijektive Abbildung existiert, wobei $n = \dim V$.