Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

9. Januar 2007

Aufgabe 1. *Sei V ein Vektorraum und $W \subset V$ ein Unterventorraum. Zeige, dass der Quotientenraum V/W eine Äquivalezklasseneinteilung von V ist, d.h.*

(i) *die Mengen $v + W$ sind nichtleer;*

(ii) *es gilt $\bigcup_{v \in V} (v + W) = V$;*

(iii) *je zwei Mengen $v_1 + W, v_2 + W$ sind entweder gleich oder disjunkt.*

Aufgabe 2. *Seien U, V Vektorräume und $p : V \to U$ eine surjektive lineare Abbildung. Zeige:*

(i) *für jedes $u \in U$ die Menge $W_u := p^{-1}(u) = \{v \in V \mid p(v) = u\}$ ist ein affiner Unterraum von V modelliert auf $\operatorname{Kern} p$;*

(ii) *für Unterräume W_u gelten die Eigenschaften (i)–(iii) aus Aufgabe 1;*

(iii) *der Quotientenraum $V/\operatorname{Kern} p$ ist isomorph zu U; gib einen Isomorphismus ein.*

Aufgabe 3. *Sei V ein Vektorraum und $W, U \subset V$ Unterventorräume von V, so dass gilt: $V = W \oplus U$. Zeige, dass V/W isomorph zu U ist.*

Aufgabe 4. *Entscheide, ob die folgende Abbildungen alternierende Formen auf $\mathbb{R}^3$ sind.*

(i) $\omega(x, y) = x_1 y_2 - x_2 y_1$	*(ii)* $\omega(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$;
(iii) $\omega(x, y) = x_1^2 y_2^2 - x_2^2 y_1^2$;	*(iv)* $\omega(x, y) = x_1 y_2 + x_1 y_3 - x_2 y_1 + x_3 y_2$.

Aufgabe 5. *Sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ eine Basis von V und $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ die duale Basis (von V^*). Für beliebige $\alpha, \beta \in V^*$ bezeichne $\alpha \wedge \beta$ eine 2–Form auf V, die wie folgt definiert ist: $(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$. Zeige, dass die Menge $(f_1 \wedge f_2, f_1 \wedge f_3, f_2 \wedge f_3)$ eine Basis von $\Lambda^2 V^*$ ist.*

Aufgabe 6. *Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum und ω eine nichttriviale alternierende n–Form auf V. Beweise, dass die System $(v_1, \dots, v_n)$ genau dann linear unabhängig ist, wenn $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.*