

Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07

Dr. A. Haydys

16. Januar 2007

Aufgabe 1. *Berechne die Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *Berechne die Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *Sei A eine $n \times n$ -Matrix. Berechne die Determinante*

$$\det \begin{pmatrix} A & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} \end{pmatrix},$$

wobei $\mathbf{0}, \mathbf{1}$ die $n \times n$ Null- bzw. Einheits-Matrizen sind.

Aufgabe 4. *Entscheide, ob die folgende Abbildungen alternierende Formen auf \mathbb{R}^3 sind.*

- (i) $\omega(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$ (ii) $\omega(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$;
(iii) $\omega(x, y) = x_1^2y_2^2 - x_2^2y_1^2$; (iv) $\omega(x, y) = x_1y_2 + x_1y_3 - x_2y_1 + x_3y_2$.

Aufgabe 5. *Sei $\mathcal{E} = (e_1, e_2, e_3)$ eine Basis von V und $\mathcal{F} = (f_1, f_2, f_3)$ die duale Basis (von V^*). Für beliebige $\alpha, \beta \in V^*$ bezeichne $\alpha \wedge \beta$ eine 2-Form auf V , die wie folgt definiert ist: $(\alpha \wedge \beta)(v_1, v_2) = \alpha(v_1)\beta(v_2) - \alpha(v_2)\beta(v_1)$. Zeige, dass die Menge $(f_1 \wedge f_2, f_1 \wedge f_3, f_2 \wedge f_3)$ eine Basis von Λ^2V^* ist.*

Aufgabe 6. *Sei V ein n -dimensionaler Vektorraum und ω eine nichttriviale alternierende n -Form auf V . Beweise, dass die System (v_1, \dots, v_n) genau dann linear unabhängig ist, wenn $\omega(v_1, \dots, v_n) \neq 0$.*