Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra I

Wintersemester 2006/07
Dr. A. Haydys

23. Januar 2007

Aufgabe 1. *Richtig oder Falsch?*

		Richtig	Falsch
(i)	*jede lineare Abbildung hat einen Eigenvektor*		
(ii)	*jede lineare Abbildung in einem $\mathbb{R}$–Vektorraum hat einen Eigenvektor*		
(iii)	*jede lineare Abbildung in einem $\mathbb{C}$–Vektorraum hat einen Eigenvektor*		
(iv)	*jede lineare Abbildung in einem 3–dimensionalem $\mathbb{R}$–Vektorraum hat einen Eigenvektor*		
(v)	*jeder Wurzel des charakteristischen Polynom von φ ist auch einen Eigenwert von φ*		
(vi)	*φ ist surjektiv $\Rightarrow 0$ ist einen Eigenwert von φ*		
(vii)	*$\varphi(v_1) = \lambda_1 v_1,\ \varphi(v_1) = \lambda_2 v_2 \ \Rightarrow\ \lambda_1 = \lambda_2$ oder v_1 und v_2 sind linear abhängig*		
(viii)	*$\varphi - \lambda\mathbf{1}$ ist invertierbar $\Leftrightarrow$ λ ist keinen Eigenwert*		
(ix)	*$\chi_\varphi(0) = 1 \ \Rightarrow\ \varphi$ ist invertierbar*		

Aufgabe 2. *Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die n verschiedene Eigenwerte hat. Finde alle invariante Unterräme von φ (ein unterraum $W \subset V$ heißt invariant bezüglich eine lineare Abbildung φ, wenn gilt: $\varphi(W) \subset W$).*

Aufgabe 3. *Sei V ein n–dimensionaler Vektorraum und $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, die n verschiedene Eigenwerte hat. Finde eine notwendige und hinreichende Bedingug dafür, dass $\sqrt{\varphi}$ (d.h. eine lineare Abbildung ψ mit $\psi^2 = \varphi$) existiert .*

Aufgabe 4. *Sei A eine $n \times n$–Matrix mit komplexen Einträge. Zeige: Es existiert eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass TAT^{-1} eine obere Dreiecksmatrix ist.*

Aufgabe 5. *Seien A und B jeweils $n \times n$ kommutierende Matrizen mit komplexen Einträge. Zeige: Es existiert eine Matrix $T \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$, so dass TAT^{-1} und TBT^{-1} beide obere Dreiecksmatrizen sind.*