# Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

10. April 2007

**Aufgabe 1.** *Seien* $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, $z, w \in \mathbb{C}$. *Entscheide, ob die folgende Abbildungen* $f : M_n(\mathbb{R}) \times M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ *(bzw.* $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}$*)*

| | |
|---|---|
| *(i)* $f(A, B) = Spur(AB)$; | *(ii)* $f(A, B) = Spur(AB^t)$; |
| *(iii)* $f(A, B) = \det(AB)$; | *(iv)* $f(z, w) = \mathrm{Re}(zw)$; |
| *(v)* $f(z, w) = \mathrm{Re}(z\bar{w})$;; | *(vi)* $f(z, w) = \lvert zw\rvert$; |

*Bilinearformen sind. Welche bestimmen euklidisches Skalarprodukt?*

**Aufgabe 2.** *Sei* $V$ *ein endlichdimensionaler* $\mathbb{K}$*–Vektorraum,* $b : V \times V \to \mathbb{K}$ *eine symmetrische Bilinearform. Bezeichne*

$$\mathrm{Kern}\, b = \{v \in V \mid b(v, u) = 0 \ \forall u \in V\}.$$

*Zeige:* $b$ *ist genau dann regulär, wenn* $\mathrm{Kern}\, b$ *trivial ist.*

**Aufgabe 3.** *Sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein euklidischer Raum. Beweise die Cauchy–Schwartz–Ungleichung*

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

**Aufgabe 4 (Normierter Raum).** *Sei* $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ *ein euklidischer Raum. Bezeichne* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. *Zeige:*

1° $\forall v \in V \ \|v\| \geq 0$, *und* $\|v\| = 0 \ \Leftrightarrow v = 0$;

2° $\|\lambda v\| = |\lambda| \, \|v\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

3° $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung).*

**Aufgabe 5.** *Seien die folgende Vektoren aus* $\mathbb{R}^4$ *gegeben:*

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

*Bezeichne* $W = \mathrm{span}(w_1, w_2)$. *Finde die orthogonale Zerlegung von* $v$ *bezüglich* $W$, *d.h. zwei Vektorn* $v_1 \in W, v_2 \in W^\perp$, *so dass gilt:* $v = v_1 + v_2$.