Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

20. Juni 2007

Aufgabe 1. *Sei A eine $n \times n$–Matrix mit reellwertigen oder komplexwertigen Einträgen. Betrachte das Gleichungsssystem $f' = Af$. Seien weiter $f_1, \dots, f_k$ Lösungen; $t_0 \in \mathbb{R}$. Sind die folgende Aussagen allgemeingültig?*

		Ja	*Nein*
(i)	$\lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_k f_k$ *ist eine Lösung für belibiege* $\lambda_1, \dots, \lambda_k$		
(ii)	*die Vektoren* $f_1(t_0), \dots, f_k(t_0)$ *sind linear unabhängig* $\Rightarrow$ *die Funktionen* $f_1, \dots, f_k$ *sind linear unabhängig*		
(iii)	*die Funktionen* $f_1, \dots, f_k$ *sind linear unabhängig* $\Rightarrow$ *die Vektoren* $f_1(t_0), \dots, f_k(t_0)$ *sind linear unabhängig*		

Aufgabe 2. *Zeige: Die Menge L aller Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$ ist ein endlichdimensionaler Vektorraum und bestimme die Dimension von L.*

Aufgabe 3. *Sei A eine schiefsymmetriesche Matrix mit reellwertigen Einträgen. Seien weiter f_1 und f_2 Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$. Zeige: sind die Vektoren $f_1(t_0)$ und $f_2(t_0)$ orthogonal für ein $t_0 \in \mathbb{R}$, so sind die Vektoren $f_1(t)$ und $f_2(t)$ orthogonal für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Aufgabe 4 (Euler's Ansatz).

(i) *Sei λ ein Eigenwert einer $n \times n$–Matrix A mit Eigenvektor v. Zeige: $f(t) = e^{\lambda t} v$ ist eine Lösung des Gleichungsystems $f' = Af$.*

(ii) *Sei λ eine komplexe Nullstelle des charakteristischen Polynoms von A, wobei A eine $n \times n$–Matrix mit reellwertigen Einträgen ist. Finde die zugehörige reellwertige Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$.*

Aufgabe 5. *Finde alle Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$, wobei*

$$(i)\ A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}; \qquad (ii)\ A = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix};$$

$$(iii)\ A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}; \qquad (iv)\ A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: die Eigenwerte von A im Fall (iv) sind $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = \lambda_3 = 1$.