Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

27. Juni 2007

Aufgabe 1. *Sei A eine 3×3–Matrix mit dem charakteristischen Polynom $\chi(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)^3$ und $\dim V_{\lambda_0} = 1$. Zeige: die Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$ haben die folgende Gestalt:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_0 t},$$

wobei P_i sind Polynome, $\deg P_i \leq 2$.

Aufgabe 2. *Finde alle Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$, wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^3$.

Aufgabe 3. *Sei A eine 3×3–Matrix mit dem charakteristischen Polynom $\chi(\lambda) = -(\lambda-\lambda_1)^2(\lambda-\lambda_2), \lambda_1 \neq \lambda_2$ und $\dim V_{\lambda_1} = 1$. Zeige: die Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$ haben die folgende Gestalt:*

$$f(t) = \begin{pmatrix} P_1(t) \\ P_2(t) \\ P_3(t) \end{pmatrix} e^{\lambda_2 t} + C v_2 e^{\lambda_2 t}$$

wobei P_i sind Polynome, $\deg P_i \leq 1$; v_2 erzeugt V_{λ_2}.

Aufgabe 4. *Finde alle Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$, wobei*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-1)^2(\lambda-2)$.

Aufgabe 5. *Welche Gestalt haben die Lösungen des Gleichungssystems $f' = Af$ unter der Voraussetzung, dass $\chi_A(\lambda) = -(\lambda-\lambda_0)^3,\ \dim V_{\lambda_0} = 2$?*

Aufgabe 6. *Formuliere und beweise die zugehörige Aussagen für 4×4–Matrizen.*