Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

4. Juli 2007

Aufgabe 1. *Entscheide, ob der Raum* (V, q), $q : V \to \mathbb{R}$ *euklidisch (bzw. pseudoeuklidisch) ist.*

		euklidisch		*pseudoeuklidisch*	
		Ja	*Nein*	*Ja*	*Nein*
(i)	$V = \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$				
(ii)	$V = \mathbb{R}^2,\ q(x,y) = x^2 + xy + y^2$				
(iii)	$V = M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = \det AA^t$				
(iv)	$V = M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = \mathit{Spur}\, A^2$				
(v)	$V = \mathbb{R}[t]_{\leq n},\ q(p) = p(0)^2 + p(1)^2 + \cdots + p(n)^2$				

Aufgabe 2. *Entscheide, ob der Raum* (V, Q), $Q : V \times V \to \mathbb{C}$ *unitär (bzw. pseudounitär) ist.*

		unitär		*pseudounitär*	
		Ja	*Nein*	*Ja*	*Nein*
(i)	$V = \mathbb{C}^2,\ Q(z,w) = z_1 w_1 + z_2 w_2$				
(ii)	$V = \mathbb{C}^2,\ Q(z,w) = z_1 \bar{w}_2 + z_2 \bar{w}_1$				
(iii)	$V = M_n(\mathbb{C}),\ Q(A,B) = \mathit{Spur}(A\bar{B}^t)$				
(iv)	$V = M_n(\mathbb{C}),\ Q(A,B) = \mathit{Spur}(A\bar{B})$				
(v)	$V = \{z \in \mathbb{C}^3 \mid z_1 + z_2 + z_3 = 0\},\ Q(z,w) = 2z_1\bar{w}_1 + z_2\bar{w}_2 - z_3\bar{w}_3$ *eingeschränkt auf* V				

Aufgabe 3. *Entscheide, ob die Abbildung* $\varphi : V \to V$ *diagonalisierbar ist.*

		Ja	*Nein*
(i)	$V = \mathbb{R}^2,\ \varphi = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$		
(ii)	$V = \mathbb{R}[t]_{\leq n},\ \varphi(p) = q,\ q(t) := p(t-1)$		
(iii)	$V = \mathbb{R}[t]_{\leq n},\ \varphi(p) = p' = \frac{d}{dt}p$		
(iv)	$V = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n,\ \varphi(x,y) = (-y,x)$		
(v)	$V = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n,\ \varphi(x,y) = (y,x)$		

Aufgabe 4. *Entscheide, ob das Polynom p irreduzibel im Polynomring $K[t]$ ist.*

		Ja	Nein
(i)	$p(t) = t^2 - 2,\ K = \mathbb{Q}$		
(ii)	$p(t) = t^3 + 7t^2 + 4t + 3,\ K = \mathbb{R}$		
(iii)	$p(t) = t^3 + 7t^2 + 4t + 3,\ K = \mathbb{Z}$		
(iv)	$p(t) = t^7 + 7t^6 + i,\ K = \mathbb{C}$		
(v)	$p(t) = t^3 + t^2 + 2,\ K = \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$		

Aufgabe 5. *Entscheide ob die folgenden Aussagen allgemeingültig sind.*

		Ja	Nein
(i)	*Das charakteristische Polynom einer Matrix bestimmt die Jordansche Normalform*		
(ii)	*Die Jordansche Normalform einer Matrix bestimmt das charakteristische Polynom*		
(iii)	*Die Matrix A^2 ist genau dann diagonalisierber, wenn A diagonalisierbar ist*		
(iv)	*Sind A und B diagonalisierbar, so sind auch $A + B$ und AB diagonalisierbar*		
(v)	*Jede nilpotente Abbildung ist diagonalisierbar*		