Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

17. April 2007

Aufgabe 1. *Entscheide, ob* (V, q) *pseudo-euklidischen Raum ist, wobei*

(i) $V = \mathbb{R}^2,\ q(x) = x_1 x_2$;

(ii) $V = \mathbb{R}^3,\ q(x) = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 3x_3^2$;

(iii) $V = M_n(\mathbb{R}),\ q(A) = Spur(A^2)$.

Aufgabe 2. *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein euklidischer Raum. Beweise die Cauchy–Schwartz–Ungleichung*

$$\langle u, v\rangle^2 \leq \langle u, u\rangle\langle v, v\rangle \qquad \text{für alle } u, v \in V.$$

Aufgabe 3 (Normierter Raum). *Sei* $(V, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ *ein euklidischer Raum. Bezeichne* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$*. Zeige:*

1° $\forall v \in V\ \|v\| \geq 0$, *und* $\|v\| = 0 \ \Leftrightarrow v = 0$;

2° $\|\lambda v\| = |\lambda|\,\|v\|, \quad \lambda \in \mathbb{R}$;

3° $\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\|$ *(Dreiecksungleichung).*

Aufgabe 4. *Seien die folgende Vektoren aus* $\mathbb{R}^4$ *gegeben:*

$$v = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Bezeichne $W = \operatorname{span}(w_1, w_2)$*. Finde die orthogonale Zerlegung von* v *bezüglich* W*, d.h. zwei Vektorn* $v_1 \in W, v_2 \in W^\perp$*, so dass gilt:* $v = v_1 + v_2$.