Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

25. April 2007

Aufgabe 1. *Entscheide, ob* (V, h) *unitärer Raum ist, wobei*

(i) $V = \mathbb{C}^n,\ h(z, w) = z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n$;

(ii) $V = \mathbb{C}^n,\ h(z, w) = z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n$;

(iii) $V = M_n(\mathbb{C}),\ h(A, B) = Spur(A\bar{B})$;

(iv) $V = \{\, f : (a, b) \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist stetig}\}, \quad h(f, g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$;

(v) $V = \{\, f : (a, b) \to \mathbb{C} \mid f \text{ ist integrierbar}\}, \quad h(f, g) = \int\limits_a^b f(t)\overline{g(t)}\, dt$.

Aufgabe 2. *Ein Untervektorraum* $V \subset \mathbb{C}^4$ *sei durch die folgende Gleichungssystem*

$$\begin{cases} z_1 + 2z_2 - iz_3 + 3iz_4 = 0, \\ 2z_1 - 5z_2 + (2 + i)z_4 = 0, \end{cases}$$

gegeben. Finde $V^\perp$.

Aufgabe 3. *Sei* $(V, (\cdot, \cdot))$ *ein euklidischer oder unitärer Raum. Zeige: für jedes* $f \in V^*$ *existiert ein einziger Vektor* $v \in V$, *so dass gilt:* $f(w) = (w, v)$ *für alle* $w \in V$.

Die Abbildung $f \mapsto v$ *ist ein Isomorphismus zwischen*

(i) V *und* V^*, *wenn* V *euklidisch ist;*

(ii) V *und* $\overline{V^*}$, *wenn* V *unitär ist.*

Finde das Bild von $f = \dfrac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3)$, *wobei* (f_1, f_2, f_3) *die duale Basis zur Standardbasis von* $\mathbb{R}^3$ *ist.*

Aufgabe 4. *Sei* $(V, (\cdot, \cdot))$ *ein unitärer Raum,* $\varphi : V \to V$ *eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgende Behauptungen äquivalent sind:*

(i) φ *ist unitär, d.h.* $(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$ *für alle* $v, w \in V$.

(ii) $(\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v)$ *für alle* $v \in V$.

(iii) Das Bild $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ *einer orthonormalen Basis* $(e_1, \ldots, e_n)$ *ist auch orthonormal.*

(iv) Das Bild $(\varphi(e_1), \ldots, \varphi(e_n))$ *jeder orthonormalen Basis* $(e_1, \ldots, e_n)$ *ist auch orthonormal.*

(v) $A\bar{A}^t = \mathbf{1}$, *wobei* A *die Matrix von* φ *in einer* ***orthonormalen*** *Basis ist.*