Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

2. Mai 2007

Aufgabe 1. *Ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ auf $M_n(\mathbb{R})$ sei gegeben durch die Formel: $\langle A, B \rangle = Spur(AB^t)$. Finde die adjungierte Abbildung zu den Abbildungen*

(i) $\varphi_1(A) = A^t$;

(ii) $\varphi_2(A) = TA, \quad M_n(\mathbb{R}) \ni T$ *ist fest;*

(iii) $\varphi_3(A) = TAT^{-1}, \quad GL_n(\mathbb{R}) \ni T$ *ist fest.*

Seien $\varphi_i : M_n(\mathbb{C}) \to M_n(\mathbb{C})$ definiert wie oben, wobei $M_n(\mathbb{C})$ der unitäre Raum mit dem Skalarprodukt $\langle A, B \rangle = Spur(A\bar{B}^t)$ ist. Finde φ_i^*.

Aufgabe 2. *Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein euklidischer oder unitärer Raum. Zeige: für jedes $f \in V^*$ existiert ein einziger Vektor $v \in V$, so dass gilt: $f(w) = (w, v)$ für alle $w \in V$.*

Die Abbildung $f \mapsto v$ ist ein Isomorphismus zwischen

(i) V *und* V^*, *wenn* V *euklidisch ist;*

(ii) V^* *und* $\overline{V}$, *wenn* V *unitär ist.*

Finde das Bild von $f = \dfrac{1}{3}(f_1 + f_2 + f_3)$, wobei (f_1, f_2, f_3) die duale Basis zur Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 3. *Sei $(V, (\cdot, \cdot))$ ein unitärer Raum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgende Behauptungen äquivalent sind:*

(i) φ *ist unitär, d.h.* $(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$ *für alle* $v, w \in V$.

(ii) $(\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v)$ *für alle* $v \in V$.

(iii) Das Bild $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ einer orthonormalen Basis $(e_1, \dots, e_n)$ ist auch orthonormal.

(iv) Das Bild $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ jeder orthonormalen Basis $(e_1, \dots, e_n)$ ist auch orthonormal.

(v) $\bar{A}^t A = \mathbf{1}$, *wobei A die Matrix von φ in einer* ***orthonormalen*** *Basis ist.*