Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

9. Mai 2007

Aufgabe 1. *Sei V ein euklidischer oder unitärer Raum. Seien weiter V_1 und V_2 Unterräume von V mit der Eigenschaft: $V = V_1 \oplus V_2$. Zeige: der Projektor $P_1 : V \to V,\ v = v_1 + v_2 \mapsto v_1$ ist genau dann selbsadjungiert, wenn V_1 und V_2 orthogonal sind.*

Aufgabe 2. *Sei $\varphi \in End(V)$ eine selstadjungierte und nichtnegative (d.h. $\langle \varphi(v), v\rangle \geq 0\ \forall v \in V$) Abbildung. Zeige: Es existiert eine lineare Abbildung ψ mit der Eigenschaft: $\psi^2 = \varphi$.*

Aufgabe 3. *Sei $(V, (\cdot,\cdot))$ ein unitärer Raum, $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung. Zeige, dass die folgende Behauptungen äquivalent sind:*

(i) *φ ist unitär, d.h. $(\varphi(v), \varphi(w)) = (v, w)$ für alle $v, w \in V$.*

(ii) *$(\varphi(v), \varphi(v)) = (v, v)$ für alle $v \in V$.*

(iii) *Das Bild $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ einer orthonormalen Basis $(e_1, \dots, e_n)$ ist auch orthonormal.*

(iv) *Das Bild $(\varphi(e_1), \dots, \varphi(e_n))$ jeder orthonormalen Basis $(e_1, \dots, e_n)$ ist auch orthonormal.*

(v) *$\bar{A}^t A = \mathbf{1}$, wobei A die Matrix von φ in einer* ***orthonormalen*** *Basis ist.*

Aufgabe 4. *Eine Abbildung $\varphi \in End(V)$ heißt schiefsymmetrisch, wenn gilt: $\langle \varphi(v), w\rangle = -\langle v, \varphi(w)\rangle$ für alle $v, w \in V$. Zeige:*

(i) *für schiefsymmetrische Abbildung φ die Abbildung $\psi = (\varphi + 1)(\varphi - 1)^{-1}$ existiert und ist isometrisch;*

(ii) *die Abbildung ψ ist invertierbar;*

(iii) *für lineare isometrische Abbildung ψ mit der Eigenschaft, dass $(\psi - 1)^{-1}$ existiert, die Abbildung $\varphi = (\psi + 1)(\psi - 1)^{-1}$ ist schiefsymmetrisch.*