Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

16. Mai 2007

▶ Im folgenden Vektorräme sind immer endlich–dimensional.

Aufgabe 1. *Sei V ein komplexer Vektorraum. Zeige, dass für beliebige lineare Abbildung $\varphi : V \to V$ existiert eine Basis $\mathcal{E}$ von V, so dass die Matrix von φ in der Basis $\mathcal{E}$ eine obere Dreicksmatrix ist. Gilt die Aussage für lineare Abbildungen auf reellen Vektorräumen?*

Definition. Seien V_1 und V_2 Vektorräume, $\psi_i \in \mathrm{End}(V_i)$. Die lineare Abbildung $\psi : V_1 \oplus V_2 \to V_1 \oplus V_2$, $\psi(v_1 + v_2) = \psi_1(v_1) + \psi_2(v_2)$ heißt die direkte Summe von ψ_1 und ψ_2: $\psi = \psi_1 \oplus \psi_2$.

Aufgabe 2. *Sei $\varphi : V \to V$ eine lineare Abbildung, $\dim V < \infty$. Beziechne $B_k = \mathrm{Bild}(\varphi^k)$, $N_k = \mathrm{Kern}\,(\varphi^k), k = 1, 2, \dots$ Zeige:*

(i) *die Folgen der Teilräumen von V*

$$N_1 \subset N_2 \subset \dots \subset N_k \subset \dots$$
$$B_1 \supset B_2 \supset \dots \supset B_k \supset \dots$$

stabilisieren sich, d.h. es existiert $n \in \mathbb{N}$ mit der Eigenschaft: $N := N_n = N_{n+1} = N_{n+2} = \dots$ (bzw. $B := B_n = B_{n+1} = B_{n+2} = \dots$).

(ii) $V = N \oplus B$;

(iii) $\varphi = \varphi_0 \oplus \varphi_1$, *wobei* φ_0 *(bzw.* φ_1*) eine nilpotente (bzw. invertierbare) Abbildung ist;*

(iv) *die Zerlegung aus (iii) ist eindeutig.*

Definition. Sei φ eine nilpotente Abbildung. Der Index von φ ist die minimale Zahl $q \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $\varphi^q = 0$.

Aufgabe 3. *Sei φ nilpotent des Indexes q, d.h. es existiert ein $v_0 \in V$, so dass gilt: $\varphi^{q-1}(v_0) \neq 0$. Zeige:*

(i) *die Vektoren $v_0, \varphi(v_0), \dots, \varphi^{q-1}(v_0)$ sind linear unabhängig und der Raum $U = \mathrm{span}(v_0, \varphi(v_0), \dots, \varphi^{q-1}(v_0))$ ist φ–invariant;*

(ii) *es existiert einen komplementeren φ–invarianten Teilraum W, d.h. $V = U \oplus W$ (Hinweis: 1.Ein Beweis kann man durch Induktion bez. q erhalten. 2.Betrachte erst der Fall $\mathrm{Bild}(\varphi) = U$).*