Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

23. Mai 2007

▶ Im folgenden Vektorräme sind immer endlich–dimensional.

▶ **Satz (zur Erinnerung)**. Jede lineare Abbildung φ lässt sich (eindeutig) als die direkte Summe $\varphi_0 \oplus \varphi_1$ darstellen, wobei φ_0 nilpotent und φ_1 invertierbar sind.

Definition. Sei φ eine nilpotente Abbildung. Der Index von φ ist die minimale Zahl $q \in \mathbb{N}$, so dass gilt: $\varphi^q = 0$.

Aufgabe 1. *Sei φ nilpotent des Indexes q, d.h. es existiert ein $v_0 \in V$, so dass gilt: $\varphi^{q-1}(v_0) \neq 0$. Zeige:*

(i) die Vektoren $v_0, \varphi(v_0), \dots, \varphi^{q-1}(v_0)$ sind linear unabhängig und der Raum $U = \operatorname{span}(v_0, \varphi(v_0), \dots, \varphi^{q-1}(v_0))$ ist φ–invariant;

(ii) es existiert ein komplementerer φ–invarianter Teilraum W, d.h. $V = U \oplus W$ (Hinweis: 1.Ein Beweis kann man durch Induktion bez. q erhalten. 2.Betrachte erst der Fall Bild$(\varphi) = U$).

Aufgabe 2. *Für jede nilpotente Abbildung $\varphi : V \to V$ existieren positive ganze Zahlen $r, q_1, \dots, q_r$ und Vektoren $v_1, \dots, v_r$, so dass die folgende Vektoren*

$$\begin{array}{c} \varphi^{q_1-1}(v_1),\ \varphi^{q_1-2}(v_1),\ \dots\ ,\varphi(v_1),\ v_1, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi^{q_r-1}(v_r),\ \varphi^{q_r-2}(v_r),\ \dots\ ,\varphi(v_r),\ v_r, \end{array} \tag{1}$$

eine Basis von V bilden. Finde die Matrix von φ in der Basis (1).

Aufgabe 3. *Sei V ein komplexer Vektorraum, $\varphi \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}}(V)$. Seien weiter $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ paarweise verschiedene Eigenwerte von φ mit algebraischen Vielfachkeiten $m_1, \dots, m_p$. Dann V hat die folgende Zerlegung*

$$V = V_1 \oplus \dots \oplus V_p\,,$$

mit der Eigenschaften:

- $\dim V_i = m_i$;
- V_i *ist φ–invariant;*
- $\varphi - \lambda_i$ *ist nilpotent auf* V_i.

Folgerung (Jordansche Normalform). Seien $V, \varphi, \lambda_i, m_i$ wie oben. Dann gilt: es gibt eine Basis $\mathcal{E} = (e_1, \ldots, e_n)$ von V, so dass die Matrix von φ in $\mathcal{E}$ die folgende Gestalt

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} J_{m_1}(\lambda_1) & & & \\ \hline & J_{m_2}(\lambda_2) & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & J_{m_p}(\lambda_p) \end{array}\right)$$

hat, wobei $J_m(\lambda)$ die Jordansche Zelle ist:

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda \end{pmatrix}.$$