Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

30. Mai 2007

Aufgabe 1. *Zeige: eine $\mathbb{C}$–lineare Abbildung φ ist genau dann nilpotent, wenn gilt: $\chi_\varphi(t) = (-t)^n$.*

Aufgabe 2. *Eine lineare Abbildung $\varphi \in End_{\mathbb{C}}(V)$ hat nur ein 1–dimensionalen invarianten Unterraum. Zeige, dass φ lässt sich nicht als die direkte Summe $\varphi_1 \oplus \varphi_2$ darstellen.*

Aufgabe 3. *Sind die folgende Behauptungen richtig oder falsch?*

(i) *Sei A eine 2×2–Matrix mit reellwertigen Einträgen. Wenn gilt* $\det A < 0$, *dann ist A diagonalisierbar.*

(ii) *Eine nilpotente Abbildung ist diagonalisierbar.*

(iii) *Wenn das Grad des Minimalpolynomes von $\varphi \in End(V)$ gleich* $\dim V$ *ist, so ist φ diagonalisierbar.*

Aufgabe 4. *Finde die Jordansche Normalform und das Minimalpolynom der folgenden Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}.$$

Hinweis: die Eigenwerte von A sind 3 und -1.

Aufgabe 5. *Sei die lineare Abbildung $\varphi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ gegeben durch*

(i) *die Jordansche Zelle*

$$J_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \vdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & \lambda \end{pmatrix};$$

(ii) *die folgende Blockmatrix*

$$\left(\begin{array}{c|c} J_{m_1}(\lambda) & 0 \\ \hline 0 & J_{m_2}(\mu) \end{array}\right).$$

Finde alle φ–invariante Teilräume.