Zusatzaufgaben zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2007
Dr. A. Haydys

6. Juni 2007

Aufgabe 1.

(i) *Zeige: Alle Lösungen der Differenzialgleichung*

$$\frac{df}{dt} = kf, \qquad k = const,\ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \tag{1}$$

sind durch die Formel $f(t) = Ce^{kt}$ gegeben, wobei C eine beliebige Konstante ist.

(ii) *Mittels des Ansatzes $f(t) = \tilde{C}(t)e^{kt}$ zeige, dass für belibige stetige Funktion g die inhomogene Gleichung*

$$\frac{df}{dt} = kf + g \tag{2}$$

eine Lösung hat. Finde alle Lösungen der Gleichung (2).

(iii) *Gleichung (2) zusammen mit der Anfangsbedingung*

$$f(0) = a$$

eine einzige Lösung hat, wobei $a \in \mathbb{R}$ ist beliebig.

(iv) *Betrachte die Gleichung (1) für komplexwertige Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C},\ k \in \mathbb{R}$. Zeige: Die Funktion f genau dann eine Lösung ist, wenn $f_0(t) = Re\, f(t)$ und $f_1(t) = Im\, f(t)$ reellwertige Lösungen sind.*
Formuliere und beweise die analoge Aussage für die inhomogene Gleichung (2).

(v) *Beweise die Aussagen (i)–(iii), wenn k eine komplexe Zahl ist, $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.*

Bemerkung. Die Eigenschaft (iii) gilt für allgemeine Differenzialgleichungen, d.h. Linearität der Gleichung ist hier unwesentlich.

Aufgabe 2.

(i) *Sei A eine $n \times n$ Oberedreiecksmatrix mit komplexen (oder reellen) Einträgen. Zeige: Die Gleichungssystem*

$$\frac{df}{dt} = Af \tag{3}$$

zusammen mit der Anfangsbedingung

$$f(0) = x_0, \qquad x_0 \in \mathbb{C}^n \ (oder\ \mathbb{R}^n) \tag{4}$$

hat eine einzige Lösung für belibigen Vektor x_0.

(ii) Beweise die Aussage (i) für beliebige Matrix $A \in M_n(\mathbb{C})$. Formuliere und beweise entsprechende Aussage für $A \in M_n(\mathbb{R})$.

Aufgabe 3. *Zeige: Die Menge L aller Lösungen des Gleichungssystems (3) ist ein Vektorraum. Zeige weiter, dass L endlichdimensional ist und bestimme die Dimension von L.*

Aufgabe 4. *Finde alle Lösungen des Gleichungssystems*

$$\begin{cases} \dot{x} = x + 2y, \\ \dot{y} = x + 4y, \end{cases}$$

wobei $\dot{z} = \dfrac{dz}{dt}$.