

Zur Erinnerung an die Lineare Algebra: Das Bilden von Darstellungsmatrizen bezüglich der $\mathbb{R}$ -Basis von $1, i$ von $\mathbb{C}$ liefert einen Ringsomorphismus

$$M: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}).$$

Sei weiter $\overline{(-)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit $1 \mapsto 1$ und $i \mapsto -i$, die *komplexe Konjugation*. Sie entspricht also der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Die Abbildung $\overline{(-)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Körperhomomorphismus.
2. Die Abbildungen $\text{id}_{\mathbb{C}}$ und $\overline{(-)}$ sind die einzigen $\mathbb{R}$ -linearen Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
3. Es gelten

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad z + \overline{z} = 2 \cdot \text{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \overline{z} = 2i \cdot \text{Im}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und

$$\overline{z} = z \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Lösungsskizze. 1. Es gelten $\overline{1} = 1$ per Definition und $\overline{0} = 0$ und $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ per Linearität. Für die Multiplikativität rechnen wir für $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\overline{a + bi} \cdot \overline{c + di} = (a - bi)(c - di) = (ac - bd) - (ad + bc)i = \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = \overline{(a + bi)(c + di)}.$$

2. Ist $\varphi: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ein Körperhomomorphismus, so gilt sicherlich $\varphi(1) = 1$ und

$$\varphi(i)^2 = \varphi(i^2) = \varphi(-1) = -\varphi(1) = -1.$$

Damit ist $\varphi(i)$ eine Nullstelle des Polynoms $T^2 + 1$, was aber genau die Nullstellen i und $-i$ hat. Aber ist φ $\mathbb{R}$ -linear bestimmen die Werte bei 1 und i die Abbildung φ in ihrer Gänze (1 und i bilden ja eine $\mathbb{R}$ -Basis von $\mathbb{C}$). Es bleiben also nur zwei Möglichkeiten für φ . Und $\varphi(i) = i$ gilt offenbar für $\varphi = \text{id}$ und $\varphi(i) = -i$ für $\varphi = \overline{(-)}$, was beides auch wirklich $\mathbb{R}$ -lineare Körperhomomorphismen sind.

3. Wir rechnen für $z = a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$

$$\overline{\overline{a + bi}} = \overline{a - bi} = a + bi, \quad (a + bi) \cdot \overline{a + bi} = (a + bi)(a - bi) = a^2 + abi - abi - b^2 i^2 = a^2 + b^2 = \sqrt{a^2 + b^2}^2 = |a + bi|^2$$

$$a + bi + \overline{a + bi} = a + bi + a - bi = 2a = 2\text{Re}(a + bi), \quad a + bi - \overline{a + bi} = a + bi - a + bi = 2bi = 2i\text{Im}(a + bi)$$

und für die letzte Behauptung ist $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \overline{z} = z$ per Definition korrekt, und für die Umkehrung haben wir bei $\overline{z} = z$

$$z = \frac{z + z}{2} = \frac{z + \overline{z}}{2} = \frac{2\text{Re}(z)}{2} = \text{Re}(z) \in \mathbb{R}.$$

□

Anmerkung: Es gibt übrigens überraschenderweise wirklich weitere Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, aber ihre Konstruktion bedarf einiger Maschinerie und ist sehr inexplizit. Gemäß der Aufgabe ist keiner von ihnen $\mathbb{R}$ -linear, und damit auch nicht stetig: Jeder solche Körperhomomorphismus ist automatisch $\mathbb{Q}$ -linear (warum?) und eine stetige $\mathbb{Q}$ -lineare Abbildung $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ist immer automatisch $\mathbb{R}$ -linear (wieder, warum?).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota: \mathbb{C} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad z \longmapsto (- \cdot z)$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

2. Bestimmen Sie das Bild $a + bi$ unter Komposition $M \circ \iota: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Lösungsskizze. 1. Offenbar gilt $\iota(1) = (-) \cdot 1 = \text{id}_{\mathbb{C}}$ und $\iota(0) = (-) \cdot 0 = \text{const}_0$; es werden also die neutralen auf die neutralen Elemente geschickt. Weiter rechnen wir für $z, w \in \mathbb{C}$

$$[\iota(z+w)](x) = x \cdot (z+w) = x \cdot z + x \cdot w = [\iota(z)](x) + [\iota(w)](x)$$

und

$$[\iota(zw)](x) = x \cdot zw = xw \cdot z = [\iota(z)](xw) = [\iota(z)]([\iota(w)](x)) = [\iota(z) \circ \iota(w)](x)$$

für alle $x \in \mathbb{C}$, was $\iota(z+w) = \iota(z) + \iota(w)$ und $\iota(zw) = \iota(z) \circ \iota(w)$ liefert. Damit ist ι ein Ringhomomorphismus und die Injektivität folgt etwa weil ι die Evaluation bei $1 \in \mathbb{C}$ als Linksinverses hat.

2. Zur Erinnerung die Darstellungsmatrix einer linearen Abbildung hat als Spalten die Werte der Basisvektoren in der Quelle, entwickelt nach der Basis im Ziel. In unserem Fall gilt für $z = a + bi$

$$[\iota(a+bi)](1) = 1 \cdot (a+bi) = a+bi, \quad \text{und} \quad [\iota(a+bi)](i) = i \cdot (a+bi) = -b+ai$$

und damit

$$M(\iota(a+bi)) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

□

Anmerkung: Man kann also $\mathbb{C}$ auch als den Unterring

$$\{A \in \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}) \mid A_{1,1} = A_{2,2} \text{ und } A_{2,1} = -A_{1,2}\}$$

von $\text{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$ einführen.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau n n -te Wurzeln.
2. Die n -ten Wurzeln von 1, die sogenannten Einheitswurzeln, bilden eine Untergruppe, genannt μ_n , von $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation.
3. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}/n \longrightarrow \mu_n$.

Hinweis: Polarkoordinaten! Jede komplexe Zahl z besitzt eine Darstellung als

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)$$

mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$.

Lösungsskizze. 1. Die n -ten Wurzel von z sind natürlich genau die Nullstellen des Polynoms $T^n - z \in \mathbb{C}[T]$. Das hat Grad n und damit höchstens n Nullstellen.

In der Vorlesung hatten wir dann gesehen, dass für

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)$$

die komplexe Zahl

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi}{n}\right) \cdot i \right)$$

eine n -te Wurzel von z ist. Aber dann ist für jedes $k \in \mathbb{Z}$

$$\sqrt[n]{r} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) \cdot i \right)$$

eine n -te Wurzel von

$$r \cdot (\cos(\varphi + 2k\pi) + \sin(\varphi + 2k\pi) \cdot i) = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i) = z$$

Aber etwa für $k = 0, \dots, n-1$ sind das wirklich n verschiedene komplexe Zahlen: Die Abbildung

$$(\cos, \sin): I \longrightarrow S^1$$

ist schließlich auf jedem halboffenen Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ mit Länge $\leq 2\pi$ injektiv und

$$\varphi, \varphi + \frac{2\pi}{n}, \varphi + \frac{4\pi}{n}, \dots, \varphi + \frac{2(n-1)\pi}{n} \in [\varphi, \varphi + 2\pi).$$

2. Sind ζ, ξ n -te Einheitswurzeln, so auch $\xi\zeta$ weil

$$(\xi\zeta)^n = \xi^n \zeta^n = 1 \cdot 1 = 1$$

und ebenso $\frac{1}{\xi}$, weil

$$\left(\frac{1}{\xi}\right)^n = \frac{1}{\xi^n} = \frac{1}{1} = 1.$$

Wegen $\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ gilt übrigens einfach $\frac{1}{\xi} = \bar{\xi}$ für alle Einheitswurzeln.

3. Eine mögliche Abbildung ist einfach durch

$$c: \mathbb{Z} \longrightarrow \mu_n, \quad k \longmapsto \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot i$$

induziert. Diese ist eine Gruppenhomomorphismus: Sie schickt 0 auf $\cos(0) + \sin(0) \cdot i = 1$ und für $k, l \in \mathbb{Z}$ rechnen wir

$$\begin{aligned} c(k+l) &= \cos\left(\frac{2(k+l)\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2(k+l)\pi}{n}\right) \cdot i = \cos\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2l\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n} + \frac{2l\pi}{n}\right) \cdot i \\ &= \left[\cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \cdot i \right] \cdot \left[\cos\left(\frac{2l\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2l\pi}{n}\right) \cdot i \right] = c(k) \cdot c(l) \end{aligned}$$

unter Benutzung der Multiplikationsregeln für Polarkoordinaten aus der Vorlesung.

Desweiteren gilt

$$c(n) = \cos\left(\frac{2n\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{2n\pi}{n}\right) \cdot i = \cos(2\pi) + \sin(2\pi) \cdot i = 1,$$

sodass c über eine eindeutige Abbildung $\mathbb{Z}/n \rightarrow \mu_n$ faktorisiert. Aber gemäß der Formel für n -te Wurzeln im ersten Aufgabenteil ist diese surjektiv und beide Seiten haben gemäß dem zweiten Aufgabenteil n Elemente. Die induzierte Abbildung muss also bijektiv sein. □

Anmerkung: Zusammen genommen sagt die Aufgabe genau, dass die n -ten komplexen Einheitswurzeln gerade die Ecken eines regulären n -Ecks bilden. Die Gruppe $\mu_n(K)$ der n -ten Einheitswurzeln ist im übrigen in *jedem* Körper K zyklisch (kann aber natürlich weniger als n Elemente haben, etwa gilt $\mu_3(\mathbb{R}) = \{1\}$), aber im Allgemeinen ist es sehr schwierig explizite Isomorphismen $\mathbb{Z}/k \rightarrow \mu_n(K)$ anzugeben.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Finden Sie explizite Formeln für die n -ten Einheitswurzeln für $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Wie sieht es mit dem Fall $n = 5$ aus? Und wie für $n = 7$ oder $n = 8$?

Hinweis: Das Wort "explizit" meint hier Formeln, die keinen Sinus oder Kosinus oder ähnliches enthalten, sondern nur Summen, Brüche, reelle Wurzeln aus reellen Zahlen usw. Und natürlich die komplexe Zahl i .

Lösungsskizze. 1. $n = 1$: Hier ist natürlich nichts zu tun, 1 ist die einzige erste Einheitswurzel.

2. $n = 2$: Auch hier wissen sie hoffentlich, dass -1 und 1 die zweiten Einheitswurzeln sind, nicht zu tun.

3. $n = 3$: Dies ist der erste interessante Fall. Die dritten Einheitswurzeln sind gerade die Nullstellen von $T^3 - 1$. Eine kennen wir, nämlich 1 . Daraus folgt $T - 1 \mid T^3 - 1$ und die geometrische Summenformel (oder Polynomdivision oder Raten) liefern

$$T^3 - 1 = (T - 1)(T^2 + T + 1).$$

Die anderen beiden dritten Einheitswurzeln sind also genau die Nullstellen von $T^2 + T + 1$. Quadratische Ergänzung liefert nun, dass für eine Nullstelle eine Quadratwurzel aus $\frac{-3}{4}$ benötigt wird. In $\mathbb{C}$ ist diese natürlich durch $\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$ gegeben, was zu den beiden nicht-trivialen dritten Einheitswurzeln

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i - \frac{1}{2} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2} \quad \text{und} \quad -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i - \frac{1}{2} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

führt. Insbesondere haben wir gerade

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{-1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

nachgewiesen.

4. $n = 4$: Hier können wir hoffentlich wieder $1, -1, i, -i$ aus dem Stehgreif angeben.

5. $n = 5$: Dieser Fall ist die erste harte Nuss. Wieder sind dies die Nullstellen von $T^5 - 1$ und wir haben

$$T^5 - 1 = (T - 1)(T^4 + T^3 + T^2 + T + 1).$$

Hätten wir nun die Lösungsformeln für Polynomgleichungen vierten Grades zur Hand könnte man einmal einsetzen und losrechnen; diese Formeln wurden von Ferrari (einem Schüler Cardano's) gefunden, aber wir haben sie nicht behandelt und sie sind hier auch nicht notwendig. Der Trick (und ja, der ist schwer zu finden!) ist, dass der Realteil einer beliebigen Einheitswurzel ξ durch

$$\operatorname{Re}(\xi) = \frac{\xi + \bar{\xi}}{2} = \frac{\xi + \frac{1}{\xi}}{2}$$

gegeben ist. Wir müssen also gar nicht so sehr ξ sondern erstmal $\xi + \frac{1}{\xi}$ bestimmen, und wenn $\xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 = 0$ ist, genügt $\xi + \frac{1}{\xi}$ miraculöserweise einer quadratischen Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten, nämlich haben wir

$$\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 = \xi^2 + 2 + \frac{1}{\xi^2}$$

und deshalb

$$\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 + \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) - 1 = \xi^2 + \xi + 1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} = \frac{1}{\xi^2}(\xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1) = 0.$$

Analog hat man etwa $\operatorname{Im}(\xi) = \frac{\xi - \frac{1}{\xi}}{2i}$ aber $\xi - \frac{1}{\xi}$ genügt keiner so leichten Gleichung (wie man weiter unten dem Imaginärteil der fünften Einheitswurzeln entnehmen kann, wenn wir ihn denn einmal ausgerechnet haben). Das Argument ist also ziemlich fragil!

Die Lösungen von $T^2 + T - 1$ berechnen sich jedenfalls einfach mittels quadratischer Ergänzung zu $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ und $\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$, und bezeichnen wir mit α eine dieser Möglichkeiten, so übersetzt sich

$$\xi + \frac{1}{\xi} = \alpha$$

zu

$$\xi^2 - \alpha\xi + 1 = 0$$

was mit noch einer quadratischen Ergänzung für $r \in \mathbb{C}$ eine Wurzel aus $\frac{\alpha^2}{4} - 1 = \frac{-3-\alpha}{4}$, die beiden Möglichkeiten

$$\xi = r + \frac{\alpha}{2} \quad \text{oder} \quad \xi = -r + \frac{\alpha}{2}$$

liefert. Einsetzen liefert, dass die beiden Quadratwurzeln r aus

$$\frac{-6+1-\sqrt{5}}{8} = \frac{-5-\sqrt{5}}{8} \quad \text{und} \quad \frac{-6+1+\sqrt{5}}{8} = \frac{-5+\sqrt{5}}{8}$$

zu ziehen sind, was

$$\pm \frac{\sqrt{5+\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot i = \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot i \quad \text{und} \quad \pm \frac{\sqrt{5-\sqrt{5}}}{2\sqrt{2}} \cdot i = \pm \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot i$$

liefert. Insgesamt erhalten wir also

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4} \cdot i \quad \text{und} \quad \frac{-1-\sqrt{5}}{4} \pm \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{4} \cdot i$$

als die vier nicht-trivialen fünften Einheitswurzeln. Insbesondere liefert das

$$\cos\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{-1+\sqrt{5}}{4} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{2\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}.$$

Eine weitere nette Anwendung komplexer Zahlen auf ein reelles Problem (es gibt aber auch rein reelle Beweise).

6. $n = 6$: Offenbar sind alle zweiten und dritten Einheitswurzeln (und auch alle deren Produkte) auch sechste. Das liefert sofort neben 1 und -1 sofort $\frac{\pm 1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ als sechste Einheitswurzeln und

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. $n = 7$: Dieser Fall ist nicht lösbar (aber das zu zeigen übersteigt wieder die Möglichkeiten dieser Vorlesung)! Dieser Aufgabenteil war also eine Fangfrage.

Versucht man den gleichen Trick wie für $n = 5$ lernt man, dass die Realteile der nicht-trivialen siebten Einheitswurzeln einer kubischen Gleichung genügen, nämlich hat man

$$\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^3 = \xi^3 + 3\xi + 3\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^3}$$

und deshalb

$$\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^3 + \left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^2 - 2\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) - 1 = \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi^2} + \frac{1}{\xi^3} = \frac{1}{\xi^3}(\xi^6 + \xi^5 + \xi^4 + \xi^3 + \xi^2 + \xi + 1) = 0.$$

Es ist also $\text{Re}(\xi)$ eine Nullstelle von $T^3 + T^2 - 2T - 1$. Wie im Falle $n = 5$ folgt nun, dass die nicht-trivial Einheitswurzeln einer der Gleichungen $\xi + \frac{1}{\xi} = \alpha$ genügen, wo α die drei Nullstellen obigen Polynoms (sie sind alle reell!) durchläuft, und damit nach einer quadratischen Ergänzung

$$\xi = \frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} i$$

die sechs nicht-trivialen siebten Einheitswurzeln sind. Aber die Zahlen α selber, lassen sich nicht mittels nur reeller Wurzeln ausdrücken: Wie für jede Kubik, die drei reelle aber keine rationale Nullstelle besitzt, sie sind der Fall des strikten casus irreducibilis, bei dem in der Cardano'schen Formel komplexe Wurzel nicht nur auftauchen, sondern sich auch nicht wieder wegheben, obwohl die Formel eine reelle Zahl beschreibt. Aber das zu Begründen bedarf wieder etwas Galois-Theorie.

8. $n = 8$: Dieser Fall ist wieder leicht: Erstmal ist jede vierte Einheitswurzel auch eine achte, also schonmal $1, -1, i, -i$. Die anderen müssen nun Quadratwurzeln aus diesen sein und gemäß der Formeln aus der vorigen Aufgabe also den halben Winkel zwischen der obigen haben. Aber es haben offenbar etwa $\pm 1 \pm i$ jeweils den halben Winkel zwischen ± 1 und $\pm i$, und normieren liefert $\frac{\pm 1 \pm i}{\sqrt{2}}$ als Kandidaten, welche man nun einfach durch Quadrieren verifizieren kann. Insbesondere folgt

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right).$$

Damit endet die Aufgabe und für die Lösung der Fälle 1,2,3,4,6 und 8 hab es auch schon volle Punktzahl. Aber machen wir noch einen Fall explizit:

9. $n = 9$: Drei Wurzeln kennen wir schon, nämlich die dritten. Die geometrische Summenformel liefert weiter, dass

$$T^9 - 1 = (T^3 - 1)(T^6 + T^3 + 1)$$

und deshalb die anderen neunten Einheitswurzeln genau die Nullstellen von $T^6 + T^3 + 1$ sein müssen. Das ist ein quadratisches Polynom in T^3 , aber alles was man hier lernen kann ist dass man dritte Wurzeln aus den nicht-trivialen dritten Einheitswurzeln ziehen muss (diese sind ja gerade die Nullstellen von $T^2 + T + 1$). Verfolgt man wieder den Ansatz aus dem Fall $n = 5$ so erhält man

$$\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right)^3 - 3\left(\xi + \frac{1}{\xi}\right) + 1 = \xi^3 + 1 + \frac{1}{\xi^3} = \frac{1}{\xi^3}(\xi^6 + \xi^3 + 1) = 0$$

für jede sodass der Realteil von jeder neunten Einheitswurzel, die keine dritte ist, eine Nullstelle des Polynoms $T^3 - 3T + 1$. Aber auch dieses hat drei reelle aber keine rationale Nullstelle und ist damit ein strikter casus irreducibilis. Es haben also 3 neunte Einheitswurzeln eine Formel wie gewünscht, 6 aber nicht.

Man kann dieses Spielchen nun noch weiter treiben: Für $n = 10$ muss man nur die zweiten und fünften Einheitswurzeln multiplizieren. Für $n = 11$ erfüllt der Realteil jeder Einheitswurzel eine Gleichung 5ten Grades (nämlich $T^5 + T^4 - 4T^3 - 3T^2 + 3T + 1$), die fünf reelle aber keine rationale Nullstelle hat, und sich wieder nur mit komplexem Wurzelziehen lösen lässt. Für $n = 12$ muss man einfach die dritte und vierten Einheitswurzeln multiplizieren, für $n = 13$ erhält man wieder ein Polynom sechsten Grades, dessen Nullstellen sich wieder nur mit komplexen Wurzeln lösen lassen, für $n = 14$ lassen sich schon die siebten Einheitswurzeln nicht beschreiben, für $n = 15$ erhält man einfach die Produkte der dritten und fünften, für $n = 16$ liefert der Quadratwurzeltrick, dass die Einheitswurzeln neben den achten von der Form

$$\pm \frac{\sqrt{2 + \epsilon\sqrt{2}}}{2} \pm \frac{\sqrt{2 - \epsilon\sqrt{2}}}{2} \cdot i$$

sind mit $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Das ganze Prozedere schwankt also immer (wenn man den Fall $n = 5$ einmal geschluckt hat) zwischen einfach und unmöglich, ein bisschen der Zerlegbarkeit von n folgend. Bei $n = 17$ geschieht nun aber eine Überraschung, die der damals 19-jährige (!) Gauß entdeckte: Obwohl 17 eine Primzahl ist, gibt es explizite Formeln für die 17ten Einheitswurzeln, das erste Mal nach $n = 3, 5$! Es gilt nämlich die völlig abgefahrene Formel

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = \frac{1}{16} \left(-1 + \sqrt{17} + \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + 2\sqrt{17 + 3\sqrt{17} - \sqrt{34 - 2\sqrt{17}} - 2\sqrt{34 + 2\sqrt{17}}} \right),$$

was der Realteil der einfachsten der 16 nicht-trivialen 17ten Einheitswurzeln ist (der Imaginärteil ist noch etwas komplizierter). Wie man die findet (und warum gerade 17?! verrate ich hier nicht.

Heute ist genau bekannt, für welche n sich die Einheitswurzeln durch reelle Wurzeln darstellen lassen; man kann es an der Primfaktorzerlegung von n ablesen. Galois-Theorie ist schon was feines... $\square$