

Zur Erinnerung an die Lineare Algebra: Das Bilden von Darstellungsmatrizen bezüglich der $\mathbb{R}$ -Basis von $1, i$ von $\mathbb{C}$ liefert einen Ringsomorphismus

$$M: \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}) \longrightarrow \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}).$$

Sei weiter $\overline{(-)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ die eindeutig bestimmte $\mathbb{R}$ -lineare Abbildung mit $1 \mapsto 1$ und $i \mapsto -i$, die *komplexe Konjugation*. Sie entspricht also der Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R}).$$

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Die Abbildung $\overline{(-)}: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ ist ein Körperhomomorphismus.
2. Die Abbildungen $\text{id}_{\mathbb{C}}$ und $\overline{(-)}$ sind die einzigen $\mathbb{R}$ -linearen Körperhomomorphismen $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$.
3. Es gelten

$$\overline{\overline{z}} = z, \quad z \cdot \overline{z} = |z|^2, \quad z + \overline{z} = 2 \cdot \text{Re}(z) \quad \text{und} \quad z - \overline{z} = 2i \cdot \text{Im}(z)$$

für alle $z \in \mathbb{C}$ und

$$\overline{z} = z \quad \text{genau dann, wenn} \quad z \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 2 (5 Punkte)

1. Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\iota: \mathbb{C} \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}, \mathbb{C}), \quad z \longmapsto (- \cdot z)$$

ein injektiver Ringhomomorphismus ist.

2. Bestimmen sie das Bild $a + bi$ unter Komposition $M \circ \iota: \mathbb{C} \rightarrow \text{Mat}(2, 2, \mathbb{R})$ für alle $a, b \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede natürlich Zahl $n \geq 1$ hat jede komplexe Zahl $z \neq 0$ genau n n -te Wurzeln.
2. Die n -ten Wurzeln von 1, die sogenannten Einheitswurzeln, bilden eine Untergruppe, genannt μ_n , von $\mathbb{C}^\times := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ bezüglich der Multiplikation.
3. Konstruieren Sie einen Gruppenisomorphismus $\mathbb{Z}/n \longrightarrow \mu_n$.

Hinweis: Polarkoordinaten! Jede komplexe Zahl z besitzt eine Darstellung als

$$z = r \cdot (\cos(\varphi) + \sin(\varphi) \cdot i)$$

mit $r, \varphi \in \mathbb{R}$ und $r \geq 0$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Finden Sie explizite Formeln für die n -ten Einheitswurzeln für $n = 1, 2, 3, 4, 6$. Wie sieht es mit dem Fall $n = 5$ aus? Und wie für $n = 7$ oder $n = 8$?

Hinweis: Das Wort "explizit" meint hier Formeln, die keinen Sinus oder Kosinus oder ähnliches enthalten, sondern nur Summen, Differenzen, reelle Wurzeln aus reellen Zahlen usw. Und natürlich die komplexe Zahl i .