Aufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien $U \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und $f_n : U \to \mathbb{C}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ holomorph, derart dass $n \mapsto f_n$ lokal gleichmäßig gegen $g : U \to \mathbb{C}$ konvergiert. Es sei weiter $A \subseteq \mathbb{C}$ beschränkt und abgeschlossen, derart dass $A \subseteq U$ und g keine Nullstelle auf ∂A hat.

1. Zeigen Sie, dass es ein $n \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass

   $$\sum_{s\in A} \mathrm{ord}_s(f_m) = \sum_{s\in A} \mathrm{ord}_s(g)$$

   für alle $m \geq n$.

2. Folgern Sie den Satz von Hurwitz: Sind alle f_n injektiv, so ist g entweder konstant oder ebenfalls injektiv.

Hinweis: Für 1. ist der Satz von Rouché nützlich, betrachten Sie also zuerst den Fall wo A eine Scheibe ist; der allgemeine Fall kann darauf reduziert werden.

Für die nächsten zwei Aufgaben seien $-\infty \leq r < s \leq \infty$ und $S_{r,s} = \{z \in \mathbb{C} \mid r < \mathrm{Im}(z) < s\}$ der zugehörige vertikale Streifen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $g : S_{r,s} \to \mathbb{C}$ holomorph und $\mathbb{Z}$-periodisch. Zeigen Sie:

1. Es existiert genau eine holomorphe Funktion $h : \mathrm{Ann}_{e^{-2\pi s}, e^{-2\pi r}} \to \mathbb{C}$ mit $g(z) = h \circ \exp(2\pi i z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$.

2. Folgern Sie: g lässt sich auf eindeutige Weise als auf $S_{r,s}$ absolut lokal gleichmäßig konvergente Reihe

   $$g = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \cdot \exp(2n\pi i -)$$

   schreiben mit $c_n \in \mathbb{C}$.

3. Bestimmen Sie diese Reihe für $r = 0$ und $s = \infty$ und $g = \mathrm{E}_1$.

Anmerkung: Solche Reihen heißen *Fourierreihen*.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $r < 0 < s$ und $f : S_{r,s} \setminus \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ eine $\mathbb{Z}$-periodische holomorphe Funktion, die in $\mathbb{Z}$ keine essentiellen Singularitäten hat. Zeigen Sie:

1. Es gibt eine holomorphe Funktion $g : S_{r,s} \to \mathbb{C}$ mit $g(0) = 0$ und ein komplexes Polynom p mit $f = g + p(\mathrm{E}_1)$ und sowohl g als auch p sind eindeutig durch f bestimmt.

2. f besitzt eine kanonische Partialbruchzerlegung genau dann, wenn $\mathrm{res}_0(f) = 0$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter (also eine von zwei über $\mathbb{R}$-linear unabhängigen Zahlen erzeugte Untergruppe). Zeigen Sie:

1. Die (laut letzem Zettel wohldefinierte) Funktion

   $$\mathbb{C} \setminus \Lambda \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto -2 \cdot \sum_{w\in\Lambda} \frac{1}{(z-w)^3}$$

   besitzt eine eindeutige Stammfunktion $\wp_\Lambda : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$, derart dass $z \longmapsto \wp(z) - \frac{1}{z^2}$ in 0 durch 0 holomorph ergänzt wird.

2. $\wp_\Lambda$ besitzt genau eine ungerade Stammfunktion $\sigma_\Lambda : \mathbb{C} \setminus \Lambda \to \mathbb{C}$ aber σ_Λ besitzt keine Stammfunktion mehr.

3. $\wp_\Lambda$ ist Λ-periodisch, σ_Λ nicht.