

Es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $p_\Lambda: \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ die Weierstraßfunktion vom letzten Zettel, explizit gegeben durch $z \mapsto \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{w^2}$.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede gerade Λ -periodische holomorphe Funktion $f: \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es ein Polynom $Q \in \mathbb{C}[T]$ mit $f = Q(p_\Lambda)$.
2. Für jede gerade Λ -periodische meromorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es eine rationale Funktion $R \in \mathbb{C}(T)$ mit $f = R(p_\Lambda)$.
3. Für jede Λ -periodische meromorphe Funktion $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ gibt es rationale Funktionen $R, S \in \mathbb{C}(T)$ mit $f = R(p_\Lambda) + S(p_\Lambda) \cdot p'_\Lambda$.

Die restlichen Aufgaben leiten den Satz von Mittag-Leffler für beliebiges offenes $U \subseteq \mathbb{C}$ her. Sei also $S \subseteq U$ ohne Häufungspunkt in U und $g: S \rightarrow \mathcal{O}(\mathbb{C})$ mit $g_s(0) = 0$ gegeben.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Gibt es eine Bijektion $d: \mathbb{N} \rightarrow S$ und eine Abbildung $c: \mathbb{N} \rightarrow \overline{S} \setminus S$ mit $|d_n - c_n| \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$, so gibt es eine Folge $l: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, derart dass die Reihe

$$z \mapsto \sum_{n \geq 0} g_s\left(\frac{1}{z-d_n}\right) - L_n(z)$$

auf $U \setminus S$ absolut lokal gleichmäßig konvergiert, wo L_n das l_n -te Laurentpolynom $\sum_{j=1}^{l_n} a_{-j}(z-c_n)^{-j}$ von $g_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$ im Kreisring $\{z \in \mathbb{C} \mid |z-c_n| > |d_n - c_n|\}$ ist.

Hinweis: Imitieren Sie den Beweis des Satzes von Mittag-Leffler für $U = \mathbb{C}$ aus der Vorlesung.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien

$$S_1 = \{s \in S \mid |s| \cdot d(\overline{S} \setminus S, s) \geq 1\} \quad \text{und} \quad S_2 = \{s \in S \mid |s| \cdot d(\overline{S} \setminus S, s) < 1\}$$

Zeigen Sie

1. S_1 hat keinen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$, und
2. zu jeder Bijektion $d: \mathbb{N} \rightarrow S_2$ gibt es eine Folge $c: \mathbb{N} \rightarrow \overline{S} \setminus S_2$ mit $|d_n - c_n| \rightarrow 0$ bei $n \rightarrow \infty$.

Hinweis: Zeigen Sie als Zwischenschritt, dass jede der Mengen $S_\epsilon = \{z \in S_2 \mid d(\overline{S} \setminus S, z) \geq \epsilon\}$ endlich ist.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Leiten Sie nun den Satz von Mittag-Leffler her: Es gibt ein holomorphes $f: U \setminus S \rightarrow \mathbb{C}$, derart, dass für jedes $s \in S$ der Hauptteil von f bei s genau $z \mapsto g_s\left(\frac{1}{z-s}\right)$ ist.