

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie zwei der folgenden Identifikationen von Dirichletreihen, wobei immer $\operatorname{Re}(z) > 1$ sei:

1. $\zeta(z)^2 = \sum_{n \geq 1} \frac{d(n)}{n^z}$, wo $d(n)$ die Anzahl der Teiler von n ist
2. $\zeta(z) \cdot \zeta(z-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{s(n)}{n^z}$, wo $s(n)$ die Summe der Teiler von n ist
3. $\frac{\zeta(z-1)}{\zeta(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\varphi(n)}{n^z}$, wo $\varphi(n)$ die Anzahl der zu teilerfremden Zahlen n in $\{1, \dots, n\}$ ist
4. $\frac{1}{\zeta(z)} = \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n^z}$, wo

$$\mu(n) = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ (-1)^m & n \text{ hat } m \text{ einfache Primfaktoren} \\ 0 & n \text{ hat einen doppelten Primfaktor} \end{cases}$$

die Möbiusfunktion ist.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass $\sum_{p \text{ prim}} \frac{1}{p}$ divergiert.

Hinweis: Logarithmieren Sie Euler's Produktformel und entwickeln Sie das Ergebnis in eine Potenzreihe.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es sei $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{C}$ eine Funktion. Betrachten Sie die zugehörige Dirichletreihe

$$z \mapsto \sum_{n \geq 1} \frac{f_n}{n^z}.$$

Zeigen Sie:

1. Es gibt ein eindeutiges $\sigma_a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ derart, dass die Dirichletreihe für alle z absolut konvergiert, wenn $\operatorname{Re}(z) > \sigma_a$ und absolut divergiert (lies: nicht absolut konvergiert), wenn $\operatorname{Re}(z) < \sigma_a$ und ebenso ein eindeutiges $\sigma_c \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ derart, dass die Dirichletreihe für alle z konvergiert, wenn $\operatorname{Re}(z) > \sigma_c$ und divergiert, wenn $\operatorname{Re}(z) < \sigma_c$.
2. Es gilt $\sigma_c \leq \sigma_a \leq \sigma_c + 1$.

Hinweis: Zeigen Sie für die Existenz von σ_c , dass, wenn die Reihe für ein $x \in \mathbb{C}$ konvergiert, sie es auch für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(z) > \operatorname{Re}(x)$ tut. Wenden Sie hierzu auf

$$\sum_{n=k}^m \frac{b_n}{n^z} = \sum_{n=k}^m \frac{b_n}{n^x} \cdot \frac{1}{n^{z-x}}$$

den abelschen Summationstrick an um die Reihe für z als Cauchyfolge nachzuweisen. Für $\sigma_a \leq \sigma_c + 1$ beobachten Sie, dass $\frac{|b_n|}{n^{\operatorname{Re}(x)}}$ beschränkt sein muss.

Anmerkung: Die Zahlen σ_a und σ_c heißen die *absolute* und *bedingte Konvergenzabszisse* der Dirichletreihe. Ich will auch noch erwähnen, dass die Dirichletreihe für jedes $\sigma > \sigma_a$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \sigma\}$ absolut gleichmäßig konvergiert und es zusätzlich noch die *gleichmäßige Konvergenzabszisse* σ_u gibt: Sie ist definiert als die kleinste Zahl, sodass die Dirichletreihe für jedes $\sigma > \sigma_u$ auf $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(z) \geq \sigma\}$ gleichmäßig konvergiert. Es gilt dann offenbar $\sigma_c \leq \sigma_u \leq \sigma_a$ und ein Satz von Bohr besagt $\sigma_a \leq \sigma_u + \frac{1}{2}$. Alle durch diese Ungleichungen zugelassenen Werte werden auch tatsächlich realisiert und es gibt Formeln, wie man sie aus den Koeffizienten berechnet, analog denen von Cartan-Hadamard (Konvergenzradius) von Lindelöf-Pringsheim (Typ und Ordnung).

Es sei $\Lambda \subseteq \mathbb{C}$ ein Gitter und $p_\Lambda: \mathbb{C} \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{C}$ die Weierstraßfunktion vom letzten Zettel, explizit gegeben durch $z \mapsto \sum_{w \in \Lambda} \frac{1}{(z-w)^2} + \frac{1}{w^2}$.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Es sei $P_\Lambda = S^2 - 4T^3 - g_2(\Lambda)T - g_3(\Lambda) \in \mathbb{C}[T, S]$, wo

$$g_2(\Lambda) = 60 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^4} \quad \text{und} \quad g_3(\Lambda) = 140 \sum_{w \in \Lambda \setminus \{0\}} \frac{1}{w^6}.$$

Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\mathbb{C}(T)[S]/P_\Lambda \longrightarrow \{f \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \mid f \text{ ist } \Lambda\text{-periodisch}\}, \quad T \longmapsto p_\Lambda, S \longmapsto p'_\Lambda$$

ein Körperisomorphismus über $\mathbb{C}$ ist.

Hinweis: Gemäß Aufgabe vom letzten Zettel ist jede meromorphe Λ -periodische Funktion von der Form $R(p) + Q(p)p'$ für $R, Q \in \mathbb{C}(T)$. Es bleibt also nur noch $(p'_\Lambda)^2 = 4p_\Lambda^3 + g_2(\Lambda)p_\Lambda + g_3(\Lambda)$ nachzuweisen. Analysieren sie hierzu die Pole dieser Funktionen.