Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \begin{cases} \frac{z^5}{|z^4|} & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$$

im Nullpunkt stetig und partiell differenzierbar ist und auch die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen erfüllt, aber dort nicht komplex differenzierbar ist.

Anmerkung: Im Gegenzug hierzu gilt aber der folgende Satz von Looman-Menchoff: Ist f stetig, partiell differenzierbar und erfüllt die Cauchy-Riemann'schen Differentialgleichungen überall auf U, so ist f auf ganz U auch komplex differenzierbar. Gerade wegen obigen Gegenbeispiels kann der Beweis dieses Satzes aber nicht ganz einfach sein und wir werden ihn in der Vorlesung nicht führen (in der Vorlesung hatten wir das Analog gesehen, wenn die partiellen Ableitungen noch als stetig angenommen sind).

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{C}$ offen und $f : U \to \mathbb{C}$ komplex differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $|f| : U \to \mathbb{R}$ lokal konstant, so auch f.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\nu : \mathbb{C}[\![T]\!] \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}, \quad F \longmapsto \min\{k \in \mathbb{N} \mid F_k \neq 0\}$$

$\mathbb{C}[\![T]\!]$ zu einem euklidischen Ring. Wie sieht es für die Unterringe $\mathbb{C}[T] \subset \mathcal{A} \subset \mathcal{A}_r \subset \mathcal{A}_0 \subset \mathbb{C}[\![T]\!]$ für $r > 0$ aus?

Zur Erinnerung: Eine Funktion $\delta : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$ macht einen kommutativen Ring R zu einem euklidischen Ring, wenn R keine Nullteiler enthält und für alle $x \in R$ und $p \in R \setminus \{0\}$ Elemente $q, r \in R$ existieren, derart dass

$$x = pq + r \quad \text{und} \quad [r = 0 \text{ oder } \delta(r) < \delta(x)].$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für jede Potenzreihe $F \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ mit $F_k \neq 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ die Abschätzungen

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{|F_{n+1}|}{|F_n|} \leq \mathrm{cvr}(F) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{|F_{n+1}|}{|F_n|}$$

für den Konvergenzradius von F gelten.