Aufgabe 1 (5 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $\arcsin\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass sie analytisch ist, für den potentiellen analytischen Definitionsbereich $D_{\arcsin} = \mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ gilt, und es auf $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}$ auch wirklich einen arcus sinus gibt.

Hinweis: Imitieren Sie entweder die Konstruktion von Logarithmen oder des arcus tangens. Beides führt zum Ziel.

Lösungsskizze. Für den ersten Schritt bemühen wir den Umkehrsatz für $\sin\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$, offenbar eine glatte mit strikt positiver Ableitung (cos), darum streng monoton und damit injektive Abbildung mit Bild $(-1,1)$. Wir erhalten also

$$\arcsin\colon (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$$

mit

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(t))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(t))}.$$

Weil $\cos(\arcsin(t)) > 0$ gilt ($\arcsin(t) \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$), können wir das als

$$\arcsin'(t) = \frac{1}{\sqrt{\cos(\arcsin(t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin(\arcsin(t))^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}$$

umschreiben. Da dies eine analytische Abbildung ist, folgt, dass auch arcsin eine ist. Die von Und offenbar folgt auch $\lim_{t \nearrow 1} \arcsin'(t) = \infty = \lim_{t \searrow -1} \arcsin'(t)$, sodass $\pm 1 \notin D_{\arcsin}$.

Nun also auf ins komplexe. Ich skizziere beide vorgeschlagenen Lösungswege.

Methode 1

Der erste Weg basiert einfach auf der Beobachtung, dass sogar

$$\sin\colon \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{C}$$

injektiv ist.

Um das zu sehen, seien $x, y \in \mathbb{C}$ mit $\sin(x) = c = \sin(y)$. In der Vorlesung hatten wir gezeigt, dass das äquivalent dazu ist, dass $\exp(ix)$ und $\exp(iy)$ Nullstellen von $T^2 - 2icT - 1$ sind. Schreiben wir $T^2 - 2icT - 1 = (T - r_1)(T - r_2)$ mittels dieser Nullstellen, so folgt durch Koeffizientenvergleich $r_1 r_2 = -1$ (diese Überlegung heißt häufig Vieta's Regel). Es muss also entweder $\exp(ix) = \exp(iy)$ gelten, oder

$$\exp(ix) = \frac{-1}{\exp(iy)} = -\exp(-iy) = \exp(-i(y+\pi))$$

da $\exp(-i\pi) = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = -1$. Aus der Charakterisierung von Urbildern der Exponentionalabbildung folgt also, dass $x = y + 2l\pi$ oder $x = -y + (2l+1)\pi$ für ein $l \in \mathbb{Z}$ gelten muss. Aber in beiden Fällen kann höchstens eins von x, y Realteil strikt zwischen $-\frac{\pi}{2}$ und $\frac{\pi}{2}$ haben. Damit ist die Injektivität gezeigt.

Die Überlegung liefert uns aber sogar noch etwas über das Randverhalten des Sinus auf diesem Bereich: Für x, y in $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2}\}$ kann nur $\sin(x) = \sin(y)$ gelten, wenn $\mathrm{Re}(x) = \frac{\pi}{2} = \mathrm{Re}(y)$ oder $\mathrm{Re}(x) = -\frac{\pi}{2} = \mathrm{Re}(y)$ gilt. Das hilft beim Bestimmen des Bildes: Wir lernen nämlich, dass

$$\sin\left(\left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \mathrm{Re}(z) < \frac{\pi}{2}\right\}\right) = \sin\left(\left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}\right) \setminus \sin\left(\left\{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) = \pm\frac{\pi}{2}\right\}\right).$$

Aber gemäß Vorlesung $\sin\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ surjektiv, wegen der 2π-Periodizität dann auch die Einschränkung auf $\left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{3\pi}{2}\right\}$, und wegen $\sin(x+\pi) = -\sin(x) = \sin(-x)$, sogar die Einschränkung auf $\left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} \leq \mathrm{Re}(z) \leq \frac{\pi}{2}\right\}$. Und für $\lambda \in \mathbb{R}$ rechnen wir

$$\sin\left(-\frac{\pi}{2} + \lambda i\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\cos(\lambda i) + \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\sin(\lambda i) = -\cos(\lambda i) = -\cosh(\lambda)$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \lambda i\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(\lambda i) + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\sin(\lambda i) = \cos(\lambda i) = \cosh(\lambda)$$

was genau die Menge $\{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}$ trifft.

Es folgt also, dass

$$\sin\colon \left\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\right\} \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}$$

bijektiv ist und nirgends verschwindende Ableitung hat (diese ist schließlich cos und hat daher Nullstellen bei $\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, von denen keine im betrachteten Streifen liegt). Der Umkehrsatz liefert uns daher eine komplex differenzierbare Abbildung

$$\arcsin\colon \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{C},$$

den Hauptzweig, mit

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{\sin'(\arcsin(z))} = \frac{1}{\cos(\arcsin(z))},$$

wie im reellen. Um das nun mittels $\cos^2 + \sin^2 = 1$ umzuschreiben, beobachten wir noch, dass $\cos(\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\})$ in der rechten Halbebene liegt: Das folgt sofort aus

$$\operatorname{Re}(\cos(z)) = \cos(\operatorname{Re}(z)) \cdot \cosh(\operatorname{Im}(z)),$$

denn auf $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ nimmt der Cosinus positive Werte an (und der Cosinus hyperbolicus tut das überall). Ist also $r\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0} \to \mathbb{C}$ der Hauptzweig der Quadratwurzel, so haben wir $r(\cos(-)^2) = \cos$ auf ganz $\{z \in \mathbb{C} \mid -\frac{\pi}{2} < \operatorname{Im}(z) < \frac{\pi}{2}\}$, da dies (wie oben schon benutzt) auf dem reellen Intervall stimmt und wir nun entweder das Identitätsprinzip anwenden können oder weil man einfach mittels Quotientenregel

$$\left(\frac{r(\cos(-)^2)}{\cos}\right)' = \frac{\cos'(\cos^2 - (r(\cos(-)^2))^2}{r(\cos(-)^2) \cdot \cos^2} = 0$$

berechnet, woraus folgt dass $\frac{r(\cos(-)^2)}{\cos}$ konstant ist und offenbar bei 0 den Wert 1 hat. Wir erhalten in jedem Falle

$$\arcsin'(z) = \frac{1}{r(\cos(\arcsin z)^2)} = \frac{1}{r(1 - \sin(\arcsin z)^2)} = \frac{1}{r(1 - z^2)}$$

und da dies analytisch ist, ist auch arcsin analytisch. Das löst den letzten Teil der Aufgabe. Wir sehen auch, dass sich arcsin nicht komplex differenzierbar über die fehlenden Schlitze fortsetzen lässt: Bei Annäherung von z etwa an den fehlenden Teil der negative reellen Achse, nähert sich $1 - z^2$ der positiven reellen Achse, und zwar bei Annäherung von z von oben, nähert sich $1 - z^2$ von unten und umgekehrt. In jedem Falle unterscheiden sich die Grenzwerte von $\arcsin'$ bei diesen Annäherungen (die sowohl von oben als auch unten existieren!) um das Vorzeichen. Es ist also $\mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}$ ein maximales Existenzgebiet von arcsin.

Bleibt noch zu zeigen, dass man lokal auch Fortsetzungen auf die übrigen Punkte von $\mathbb{C} \setminus \{\pm 1\}$ hat. Das kann man natürlich durch Analyse des Sinus auf weiteren Bereichen von $\mathbb{C}$ erreichen, was aber weiteren Aufwand bedeutet, oder etwas trickreicher: Hierzu wählen wir zum Beispiel den Zweig $s\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ der Quadratwurzelfunktion mit $s(\operatorname{cis}(\pi/4)) = \operatorname{cis}(\pi/8)$; dieser stimmt dann auf der ganzen oberen Halbebene H mit r überein. Betrachte nun

$$g\colon \mathbb{C} \setminus ([-1, 1] \cup \mathbb{R} \cdot i) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{s(1 - z^2)};$$

im Definitionsbereich sind genau die $z \in \mathbb{C}$ entfernt für die $1 - z^2$ eine positive reelle Zahl ist. Diese Funktion ist analytisch und stimmt mit $z \mapsto \frac{1}{r(1-z^2)}$ per Konstruktion bei allen komplexen Zahlen z überein für die $1 - z^2$ in der oberen Halbebene liegt, also insbesondere bei denen mit $\operatorname{Re}(z) < 0$ und $\operatorname{Im}(z) > 0$. Ist nun $\lambda < -1$ so können wir g um λ in eine Taylorreihe entwickeln, sagen wir auf der Scheibe $\mathrm{D}(\lambda, r)$, mit $0 < r < |\lambda|$. Daher besitzt g auf dieser Scheibe eine Stammfunktion h (laut Vorlesung einfach gegeben durch die offensichtliche Manipulation der Koeffizienten der Potenzreihe) und wegen $h' = g = \arcsin'$ auf dem zusammenhängenden $\mathrm{D}(\lambda, r) \cap \mathrm{H}$, gilt dort $h + c = \arcsin$ für ein $c \in \mathbb{C}$. Es ist dann also

$$\mathrm{H} \cup \mathrm{D}(0,1) \cup \mathrm{D}(\lambda, r) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \begin{cases} \arcsin(z) & z \in H \\ \arcsin(z) & z \in \mathrm{D}(0,1) \\ h(z) + c & z \in \mathrm{D}(\lambda, r) \end{cases}$$

wohldefiniert und analytisch, die Quelle offenbar wegzusammenhängend, sodass $\lambda \in \mathrm{D}(\lambda, r) \subseteq \mathrm{D}_{\arcsin}$ wie gewünscht folgt. Für $\lambda > 1$ wähle man einfach den anderen Zweig der Quadratwurzel auf $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{>0}$.

Methode 2

Für den zweiten Lösungsweg, wollen wir stärker benutzen, dass $\sin(z) = c$ laut Vorlesung äquivalent ist zu $\exp(iz)^2 - 2ic\exp(iz) - 1$. Sind also $\pm r$ die Wurzeln von $1-c^2$, so muss $\exp(iz) = \pm r + ic$ mit anderen Worten iz ist ein Logarithmus von $\pm r + ic$. Wählen wir uns also einen Zweig $s\colon \mathrm{S}_v \to \mathbb{C}$ der Quadratwurzel und $l\colon \mathrm{S}_w \longrightarrow \mathbb{C}$ ein Zweig des Logarithmus, so ist $z \mapsto -il(iz + s(1-z^2))$ ein Funktion mit a mit $\sin(a(z)) = z$ für alle z mit $1-z^2 \in \mathrm{S}_v$ und $iz + s(1-z^2) \in \mathrm{S}_w$ (diese Zahlen bilden auch den Definitionsbereich von a). Anstatt das nun komplett allgemein zu analysieren, treffen wir einfach einige Wahlen. Ist r der Hauptzweig der Wurzelfunktion (also insbesondere $v = -1$) dann ist die erste Bedingung äquivalent zu $z \notin \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\}$. Aber dann liegt $iz + r(1-z^2)$ nie auf der negativen reellen Achse: Aus $iz + r(1-z^2) = -\lambda$ für ein $\lambda \in \mathbb{R}$ folgt

$$1 - z^2 = (\lambda + iz)^2 = \lambda^2 + 2\lambda iz - z^2$$

und damit $1 - \lambda^2 = 2\lambda iz$ insbesondere muss $z = \mu i$ für ein $\mu \in \mathbb{R}$ gelten. Aber $i\mu i + r(1-(\mu i)^2) = -\mu + \sqrt{1+\mu^2}$ ist offenbar niemals negativ. Wir erhalten also eine Funktion

$$\arcsin\colon \mathbb{C} \setminus \{t \in \mathbb{R} \mid |t| \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{C}\},, \quad z \longmapsto -i\ln(iz + r(1-z^2)),$$

den Hauptzweig des arcus sinus. Diese Funktion ist Komposition analytischer Funktionen offenbar analytisch, aber wir müssen noch prüfen, dass sie auf $(-1,1)$ mit dem reellen arcus sinus übereinstimmt. Das kann man auf verschiedene Arten nachrechnen, die schnellste ist vielleicht, dass mit $g(z) = iz + r(1-z^2)$

$$\arcsin'(z) = -i \cdot \frac{g'(z)}{iz + r(1-z^2)} = -i \cdot \frac{i + r'(1-z^2)(-2z)}{iz + r(1-z^2)} = \frac{1}{iz + r(1-z^2)} + \frac{2iz}{2r(1-z^2)(iz + r(1-z^2))}$$

$$= \frac{r(1-z^2) + iz}{r(1-z^2)(iz + r(1-z^2))} = \frac{1}{r(1-z^2)},$$

was die Ableitung des reellen Arcus sinus erweitert. Daher muss ihre Differenz auf $(-1,1)$ konstant sein, aber beide schicken 0 auf 0, stimmen also überein. Das löst also wieder den letzten Punkt der Aufgabe.

Um die lokale Erweiterung auf die fehlenden Schlitze zu erhalten, kann man nun genauso vorgehen wie oben. Oder man wiederholt die Konstruktion mit einem anderen Zweig der Quadratwurzel (diesmal ist dieser Weg nicht sehr aufwändig). Ist zum Beispiel wieder $s\colon \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{C}$ der Zweig mit $s(\mathrm{cis}(\pi/4)) = \mathrm{cis}(\pi/8)$, ist $s(1-z^2)$ immer dann definiert, wenn $z \in \mathbb{C} \setminus ([-1,1] \cup \mathbb{R} \cdot i)$. Und das Argument oben zeigt, dass für so ein z die komplexe Zahl $iz + s(1-z^2)$ nie reell sein kann. Also erhalten wir mit

$$a\colon \mathbb{C} \setminus ([-1,1] \cup \mathbb{R} \cdot i) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto -i\ln(iz + s(1-z^2))$$

eine weitere arcus sinus Funktion. Aber die beiden Wurzelfunktionen stimmen auf der oberen Halbebene überein, also stimmen arcsin und a auf allen z überein für die $1-z^2$ in der oberen Halbebene liegt, also insbesondere bei allen z mit $\mathrm{Re}(z) < 0$ und $\mathrm{Im}(z) > 0$. Es ist also in der doppelt geschlitzten Ebene

$$b\colon \mathbb{C} \setminus (\{-1 + i\lambda \mid \lambda \geq 0\} \cup \mathbb{R}_{\geq 1}), \quad z \longmapsto \begin{cases} \arcsin(z) & \mathrm{Re}(z) \geq -1 \\ a(z) & \mathrm{Re}(z) < -1 \end{cases}$$

wohldefiniert und analytisch und setzt den reellen arcsin fort. Damit gilt (diesmal in einem Zug) $\mathbb{R}_{<-1} \subseteq \mathrm{D}_{\arcsin}$, und für den positiven Teil benutze man $-s$ statt s in obiger Überlegung. □

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie: Ist $f\colon (-\epsilon, r) \to \mathbb{R}$ eine glatte Abbildung mit $f^{(k)}(t) \geq 0$ für alle $0 \leq t < r$ und $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass dann für das k-te Taylorpolynom mit Entwicklungspunkt 0

$$0 \leq \mathrm{T}_{0,k} f(t) \leq f(t)$$

für alle $0 \leq t < r$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt. Leiten Sie $\mathrm{cvr}(\mathrm{T}_0 \tan) = \frac{\pi}{2}$ ab.

Lösungsskizze. Zunächst beobachten wir, dass $T_{k,0} f(t) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} t^k$ für $0 \leq t < r$ per Annahme ausschließlich aus nicht-negativen Summanden besteht, also sicherlich selbst nicht-negativ ist. Das zeigt die linke Ungleichung für alle f. Die rechte zeigen wir per Induktion über k (aber quantifiziert über alle f). Nämlich behaupten wir, dass $f - \mathrm{T}_{0,k} f$ immer monoton ist, was

$$f(t) - \mathrm{T}_{0,k} f(t) \geq f(0) - (\mathrm{T}_{0,k} f)(0) = 0$$

und damit die Behauptung liefert. Für die Monotonie dürfen wir gemäß Zwischenwertsatz prüfen, ob die Ableitung nicht-negativ ist. Aber dafür beobachten wir, dass $(f - \mathrm{T}_{0,k} f)' = f' - \mathrm{T}_{0,k-1} f'$ gilt, und letzteres ist dann bei $k > 0$ per Induktionannahme nicht-negativ und bei $k = 0$ evaluiert es sich zu f' was als nicht-negative angenommen ist.

Es folgt also, dass die Taylorreihe $\mathrm{T}_0 f(t)$ für jedes $t < r$ konvergiert (bei analytischem f gegen $f(t)$ sonst gegen irgendetwas anderes), und damit $\mathrm{cvr}(\mathrm{T}_0 f) \geq r$. Angewendet auf $f = \tan\colon \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ bedeutet das $\mathrm{cvr}(\mathrm{T}_0 \tan) \geq \frac{\pi}{2}$ und wegen $\lim_{t \searrow \frac{\pi}{2}} \tan(t) = \infty$ muss sicherlich auch $\mathrm{cvr}(\mathrm{T}_0 \tan) \leq \frac{\pi}{2}$. □

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Es seien $a\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ und $b\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}_{>0}$ Folgen derart, dass es ein $M > 0$ gibt, sodass für alle $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left|\sum_{k=0}^{m} a_k\right| \leq M, \quad b_{m+1} < b_m \quad \text{und} \quad b_n \to 0$$

bei $n \to \infty$. Zeigen Sie, dass dann die Reihe $\sum_{k\geq 0} a_k b_k$ konvergiert.

Hinweis: Abel's Summationstrick

$$\sum_{k=0}^{n} f_k g_k = f_{n+1} s_n - \sum_{k=0}^{n} s_k (f_{k+1} - f_k)$$

mit $s_k = \sum_{l=0}^{k} g_l$ für je zwei Folgen $f, g\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ ist sowohl hier als auch bei der nächsten Aufgabe nützlich.

Lösungsskizze. Wir folgen dem Hinweis und finden also

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = b_{n+1} s_n - \sum_{k=0}^{n} s_k (b_{k+1} - b_k)$$

mit $s_k = \sum_{l=0}^{k} a_l$ und damit insbesondere $|s_k| \leq M$ für alle k. Insbesondere folgt, dass der linke Term rechts bei $n \to \infty$ gegen 0 konvergiert und damit die rechte Reihe genau dann, wenn die linke es tut. Aber die rechte erfüllt

$$\sum_{k=0}^{n} |s_k (b_{k+1} - b_k)| = \sum_{k=0}^{n} |s_k| (b_k - b_{k+1}) \leq M \sum_{k=0}^{n} b_k - b_{k+1} = M(b_0 - b_{n+1}) \leq M b_0,$$

und konvergiert damit sogar absolut. Umrühren fertig.

Man bemerke, dass hier für $a_k = (-1)^k$ genau der hoffentlich wohl-bekannte Fakt steht, dass alternierende Reihen über monotone Nullfolgen konvergieren. □

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben $F \in \mathbb{C}[\![T]\!]$ mit $0 < \mathrm{cvr}(F) < \infty$. Zeigen Sie: Konvergiert für ein $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| = \mathrm{cvr}(F)$ die Reihe $\sum_{k\geq 0} F_k z^k$ so gilt

$$\lim_{t \nearrow 1} F(tz) = \sum_{k\geq 0} F_k z^k.$$

Lösungsskizze. Wir folgen wieder dem Hinweis (mit kleinem Trick!) und erhalten für

$$\sum_{k=0}^{n} F_k (tz)^k = \sum_{k=0}^{n} t^k \cdot F_k z^k = t^{n+1} s_n - \sum_{k=0}^{n} s_k (t^{k+1} - t^k) = t^{n+1} s_n - (t-1) \sum_{k=0}^{n} s_k t^k$$

mit $s_k = \sum_{l=0}^{k} F_l z^l$. Wenn jetzt $n \to \infty$ geht und $0 < t < 1$, so verschwindet wegen $t^{n+1} \to 0$ und $s_n \to F(z)$ der erste Summand rechts. Daher konvergiert, weil die Reihe auf der linken Seite konvergiert, auch die Reihe auf der rechten Seite. Wir sehen also

$$F(tz) = (1-t)\sum_{k\geq 0} s_k t^k$$

und wollen zeigen, dass die rechte Seite bei $t \to 1$ gegen $F(z)$ konvergiert. Dafür bemerken wir

$$F(tz) - F(z) = (1-t)\sum_{k\geq 0}(s_k - F(z))t^k$$

Aber für jedes $\epsilon > 0$ gibt es, weil die s_k gegen 0 konvergieren, ein $n \in \mathbb{N}$ mit $|s_k - F(z)| \leq \frac{\epsilon}{2}$ für alle $k \geq n$. Dann haben wir

$$\left|(1-t)\sum_{k\geq n}(s_k - F(z))t^k\right| \leq (1-t)\sum_{k\geq n}|s_k - F(z)| \cdot t^k \leq \frac{(1-t)\epsilon}{2} \cdot \sum_{k\geq n} t^k = \frac{(1-t)\epsilon t^n}{2}\sum_{k\geq 0} t^k = \frac{\epsilon t^n}{2} \leq \frac{\epsilon}{2}$$

für alle t. Es gilt aber auch

$$\left|(1-t)\sum_{k=0}^{n-1}(s_k - F(z))t^k\right| \leq (1-t)\sum_{k=0}^{n-1}|s_k - F(z)|t^k \leq (1-t)\sum_{k=0}^{n-1}|s_k - F(z)|$$

und die rechte Seite konvergiert bei $t \to 1$ gegen 0, ist also für $1 > t > 1-\delta$ für klein genuges $\delta > 0$ sicherlich kleiner als $\frac{\epsilon}{2}$.

Damit ist für solche t dann

$$|F(tz) - F(z)| = \left|(t-1)\sum_{k\geq 0}(s_k - F(z))t^k\right| < \epsilon$$

was genau die gewünschte Konvergenz bedeutet. □