Aufgabe 1

Da $f(z) = \exp(-z^2)$ auf ganz $\mathbb{C}$ holomorph ist, können wir das Lemma von Goursat auf jedes Dreieck anwenden. Wir betrachten für $r > 0$ das Dreieck Δ_r mit den Ecken 0, r und $r(1+i)$. Dann ist

$$0 = \oint_{\Delta_r} \exp(-z^2)\mathrm{d}z = \int_{[0,r]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z + \int_{[r,r(1+i)]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z + \int_{[r(1+i),0]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z,$$

und somit

$$\int_{[0,r(1+i)]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z = \int_{[0,r]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z + \int_{[r,r(1+i)]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z,$$

wobei wir auf der linken Seite das Vorzeichen losgeworden sind, indem wir den Pfad umgekehrt haben. Wir können auf der rechten Seite dann die Grenzwerte für $r \to \infty$ separat für beide Summanden betrachten: Der erste ist dann einfach das in der Aufgabenstellung erwähnte Gauß-Integral, und wir wissen (oder dürfen zumindest benutzen):

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[0,r]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z = \int_0^\infty \exp(-x^2)dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Es genügt also zu zeigen, dass der zweite Summand gegen 0 konvergiert. Dafür parametrisieren wir den Pfad $[r, r(1+i)]$ durch

$$\begin{aligned} w : [0,r] &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto r + t \cdot i. \end{aligned}$$

Es ist dann $w' = i$, und somit

$$\begin{aligned} \int_{[r,r(1+i)]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z &= \int_0^r \exp\left(-(r+t\,i)^2\right) \cdot i \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^r \exp\left(-r^2 + t^2 - 2r\,t\,i\right) \cdot i \,\mathrm{d}t \\ &= \int_0^r e^{-r^2+t^2} \operatorname{cis}(-2r\,t) \cdot i \,\mathrm{d}t \end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned} \left| \int_{[r,r(1+i)]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z \right| &= \left| \int_0^r e^{-r^2+t^2} \operatorname{cis}(-2r\,t) \cdot i \,\mathrm{d}t \right| \\ &\leq \int_0^r \left| e^{-r^2+t^2} \operatorname{cis}(-2r\,t) \cdot i \right| \mathrm{d}t \\ &= \int_0^r e^{-r^2+t^2} \,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\int_0^r e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{r^2}} \end{aligned}$$

In diesem Bruch gehen für $r \to \infty$ sowohl Zähler als auch Nenner gegen ∞, also lässt sich für den Grenzwert l'Hôpital anwenden und wir erhalten

$$\lim_{r\to\infty} \frac{\int_0^r e^{t^2}\,\mathrm{d}t}{e^{r^2}} = \lim_{r\to\infty} \frac{e^{r^2}}{2r \cdot e^{r^2}} = \lim_{r\to\infty} \frac{1}{2r} = 0,$$

und somit

$$\lim_{r\to\infty} \int_{[r,r(1+i)]} \exp(-z^2)\mathrm{d}z = 0.$$

Es folgt also

$$\lim_{r\to\infty}\int_{[0,r(1+i)]}\exp(-z^2)\mathrm{d}z=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Für die Fresnel'schen Integrale wollen wir dieses Ergebnis verwenden: Dafür parametrisieren wir nun $[0,r(1+i)]$ durch

$$\begin{aligned} v:[0,r]&\longrightarrow\mathbb{C}\\ t&\longmapsto t\cdot(1+i). \end{aligned}$$

Dann ist $v'=1+i$, und somit

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\pi}}{2}&=\lim_{r\to\infty}\int_0^r \exp\left(-(t(1+i))^2\right)\cdot(1+i)\mathrm{d}t\\ &=(1+i)\int_0^\infty \exp\left(-2t^2 i\right)\mathrm{d}t\\ &=(1+i)\int_0^\infty \cos\left(-2t^2\right)+i\cdot\sin\left(-2t^2\right)\mathrm{d}t\\ &=(1+i)\left(\int_0^\infty \cos\left(2t^2\right)\mathrm{d}t-i\cdot\int_0^\infty\sin\left(2t^2\right)\mathrm{d}t\right)\\ &=\frac{1+i}{\sqrt{2}}\left(\int_0^\infty\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x-i\cdot\int_0^\infty\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x\right) \end{aligned}$$

Dabei haben wir in der letzten Zeile $x(t)=\frac{t}{\sqrt{2}}$ mit $x'=\frac{1}{\sqrt{2}}$ substituiert.

Nun ist der Kehrwert von $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$ gerade $\frac{\sqrt{2}}{1+i}=\frac{1-i}{\sqrt{2}}$, also erhalten wir durch Multiplikation damit:

$$\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}-i\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}=\int_0^\infty\cos\left(x^2\right)\mathrm{d}x-i\cdot\int_0^\infty\sin\left(x^2\right)\mathrm{d}x.$$

Die zu zeigenden Gleichungen sind dann gerade der reelle und (negative) imaginäre Teil dieser Gleichung.

Aufgabe 2

Für den ersten Teil zeigen wir zwei verschiedene Ansätze, der erste ist etwas topologischer, der zweite etwas expliziter:

1. Ansatz: Wir bezeichnen mit $\mathcal{I}$ die Menge aller $A\subseteq[0,1]$ der Form $A=U_A\cap[0,1]$ für ein offenes Intervall $U_A\subseteq\mathbb{R}$ mit $0\in U_A$, für die es eine stetige Abbildung $v_A:A\to\mathbb{C}$ gibt mit $\exp\circ v_A=w|_A$.

Wir bemerken zunächst, dass $\mathcal{I}$ nicht leer ist: Für $\delta>0$ klein genug liegt das Bild von $w|_{[0,\delta)}$ in einem Schlitzgebiet S_z. (Denn mit $\varepsilon=|w(0)|>0$ ist $D(w(0),\varepsilon)\subseteq S_{-w(0)}$, dann gibt uns die Stetigkeit von w ein solches δ.) Insbesondere gibt es also eine Logarithmusfunktion $l:S_z\to\mathbb{C}$. Die Abbildung $v_{[0,\delta)}=l\circ w|_{[0,\delta)}$ erfüllt dann gerade $\exp\circ v_{[0,\delta)}=w|_{[0,\delta)}$, also ist $[0,\delta)\in\mathcal{I}$.

Weiterhin bemerken wir, dass für $A\in\mathcal{I}$ zwei Funktionen $v_A,v_A':A\to\mathbb{C}$ mit $\exp\circ v_A=\exp\circ v_A'=w|_A$ sich lediglich um ein Vielfaches von $2\pi i$ unterscheiden: Das gilt sicherlich punktweise, und da A zusammenhängend ist und die Funktionen stetig sind, kann ihre Differenz nicht zwischen verschiedenen Vielfachen springen. Wir fixieren ein v_0 mit $\exp(v_0)=w(0)$ fixieren, und alle v_A so wählen, dass $v_A(0)=v_0$ ist. Dann folgt aus obiger Bemerkung, dass für $A_1,A_2\in\mathcal{I}$ v_{A_1} und v_{A_2} auf $A_1\cap A_2$ übereinstimmen.

Betrachte nun $I=\bigcup_{A\in I}A$. Da $\mathcal{I}$ nichtleer ist, ist I nichtleer, und $U=\bigcup_{A\in\mathcal{I}}U_A$ ist als Vereinigung offener Intervalle, die 0 enthalten, wieder ein solches, und es gilt $I=U\cap[0,1]$. Wir definieren nun

$$\begin{aligned} v:I&\longrightarrow\mathbb{C}\\ t&\mapsto v_A(t)\text{ für ein }t\in A. \end{aligned}$$

Mit der vorherigen Bemerkung ist dies wohldefiniert und stetig. Es ist also $I \in \mathcal{I}$, und per Konstruktion ist es das größte Element bezüglich Inklusion.

Schließlich bemerken wir, dass dann aber schon $I = [0,1]$ sein muss: Sei $s = \sup(I)$. Dann existiert analog zu oben wieder ein $\delta > 0$, sodass das Bild von $w|_{[0,1]\cap D(s,\delta)}$ in einem Schlitzgebiet gibt, ergo existiert dort Logarithmusfunktion l. Wir können l so wählen, dass $l(w(s-\frac{\delta}{2})) = v(s-\frac{\delta}{2})$ ist. (Schließlich ist per Konstruktion $\exp(v(s-\frac{\delta}{2})) = w(s-\frac{\delta}{2})$.) Dann ist aber

$$\begin{aligned} \tilde{v} : I \cup \big([0,1] \cap D(s,\delta)\big) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto \begin{cases} v(t) & t \in I \\ l(w(t)) & t \in [0,1] \cap D(s,\delta) \end{cases} \end{aligned}$$

eine wohldefinierte stetige Fortsetzung von v, die von exp auf w gesendet wird. Nach Maximalität von I muss dann aber $[0,1] \cap D(s,\delta) \subseteq I$ sein: Insbesondere enthält also I sein Supremum. Da aber $I = U \cap [0,1]$ für ein offenes Intervall U ist, und U sein Supremum nicht enthält, muss also $\sup(U) > 1$ sein, und somit $1 \in I$, also schlussendlich $I = [0,1]$.

2. Ansatz: Wir überdecken $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ durch zwei Schlitzgebiete: $\mathbb{C}\backslash\{0\} = S_1 \cup S_{-1}$. Wir benutzen nun die folgende Aussage, die wir in Aufgabe 4.3 benötigen und beweisen werden:

Lemma. *Sei $w : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $U, V \subseteq \mathbb{C}$ zwei offene Mengen, sodass das Bild von w in $U \cup V$ liegt. Dann existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ derart, dass das Bild von $w|_{[t_i,t_{i+1}]}$ für jedes $0 \le i < k$ vollständig in U oder in V liegt.*

Wir wählen also solche t_i für $U = S_1$, $V = S_{-1}$. Damit ist es nun leicht, $v : [0,1] \to \mathbb{C}$ induktiv zu bauen: Zunächst bemerken wir, dass das Bild von $w|_{[t_0,t_1]}$ komplett in einem der Schlitzgebiete liegt: Wir können dort also eine Logarithmusfunktion l_0 wählen, und setzen für $t \in [t_0, t_1]$:

$$v(t) = l_0(w(t)).$$

Insbesondere gilt dort also $\exp(v(t)) = w(t)$. Sei nun angenommen, dass v schon für alle $t \in [0, t_j]$ definiert ist, und dass dort gilt, dass $\exp(v(t)) = w(t)$. Da das Bild von $w|_{[t_j,t_{j+1}]}$ vollständig in einem der Schlitzgebiete enthalten ist, können wir wieder eine Logarithmusfunktion wählen. Die verschiedenen Wahlen unterscheiden sich gerade durch Vielfache von $2\pi i$, unsere ist aber bereits vorgegeben: Wir wählen einen Logarithmus l_j auf dem entsprechenden Gebiet derart, dass $l_j(w(t_j)) = v(t_j)$ ist. Das geht, da nach Annahme $\exp(v(t_j)) = w(t_j)$ ist. Damit können wir für $t \in [t_j, t_{j+1}]$ setzen:

$$v(t) = l_j(w(t)).$$

Mit unserer Wahl von l_j haben wir dann gerade sichergestellt, dass v stetig (und wohldefiniert) bei t_j ist. (Auf (t_j, t_{j+1}) ist v nach Konstruktion natürlich automatisch stetig.)

Im zweiten Teil der Aufgabe wollen wir folgern, dass jede Schleife $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}\backslash\{0\}$ homotop ist zu einer der Schleifen

$$\begin{aligned} \sigma_n : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{0\} \\ t &\longmapsto \operatorname{cis}(t \cdot n \cdot 2\pi i). \end{aligned}$$

für $n \in \mathbb{Z}$.

Wir bemerken zunächst, dass für $v : [0,1] \to \mathbb{C}$ die Komposition $\exp \circ v$ genau dann eine Schleife ist, wenn $v(1) - v(0) = n \cdot 2\pi i$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist. Also ist für eine Homotopie $h : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{C}$ die Komposition $\exp \circ h$ genau dann eine Homotopie von Schleifen in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, wenn für alle $t \in [0,1]$ gilt, dass $h(1,t) - h(0,t) = n \cdot 2\pi i$ für ein $n \in \mathbb{Z}$ ist. (Dieses n muss dann für alle t gleich sein, da h stetig und $[0,1]$ zusammenhängend ist.)

Wir wählen also einen Weg $\tilde{\gamma} : [0,1] \to \mathbb{C}$ mit $\exp \circ \tilde{\gamma} = \gamma$. Dann ist $\tilde{\gamma}$ homotop zu der Strecke $[\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1)]$ relativ der Endpunkte: Eine explizite solche Homotopie ist gegeben durch

$$h_1(s,t) = (1-t) \cdot \gamma(s) + t \cdot \big((1-s)\tilde{\gamma}(0) + s\tilde{\gamma}(1)\big).$$

Da h_1 die Endpunkte fixiert, ist $\exp\circ h_1$ eine Homotopie von Schleifen.

Als nächstes betrachten wir die Homotopie

$$h_2(s,t) = (1-t)\tilde{\gamma}(0) + s(\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)):$$

Es ist $h_2(-,0) = [\tilde{\gamma}(0), \tilde{\gamma}(1)]$, $h_2(-,1) = [0, \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)]$ und für alle t gilt $h_2(1,t) - h(0,t) = \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)$, also ist $\exp\circ h_2$ ebenfalls eine Homotopie von Schleifen in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$.

Da $\tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0) = n\cdot 2\pi i$ für ein $n\in\mathbb{Z}$ ist, ist

$$\exp\circ[0, \tilde{\gamma}(1) - \tilde{\gamma}(0)](t) = \exp\circ[0, n\cdot 2\pi i](t) = \exp(t\cdot(n\cdot 2\pi i)) = \operatorname{cis}(t\cdot n\cdot 2\pi i)) = \sigma_n(t)$$

Somit ist also die Schleife γ homotop in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ zu σ_n.

Aufgabe 3

Dass (1) aus (2) folgt, ist schnell zu sehen: Sei $\gamma : [0,1] \to U$ eine Schleife. Bezeichne mit $c_{\gamma(0)} : [0,1] \to U$ die konstante Schleife auf $\gamma(0)$. Da γ und $c_{\gamma(0)}$ die gleichen Start- und Endpunkte haben, gibt es mit (2) dann eine Homotopie relativ dieser zwischen den beiden, d.h. ein $h : [0,1]\times[0,1] \to U$ mit $h(s,0) = \gamma(s)$, $h(s,1) = c_{\gamma(0)}(s) = \gamma(0)$, sowie $h(0,t) = \gamma(0)$ und $h(1,t) = \gamma(1) = \gamma(0)$: Das ist dann insbesondere eine Homotopie von Schleifen.

Für die andere Richtung müssen wir ein bisschen mehr basteln: Seien v und w zwei Wege in U mit $v(0) = w(0) = x_0$ und $v(1) = w(1) = x_1$. Dann ist

$$\begin{aligned} v * w^{\text{rev}} : [0,2] &\longrightarrow U \\ s &\longmapsto \begin{cases} v(s) & s \le 1 \\ w(2-s) & s \ge 1 \end{cases} \end{aligned}$$

eine Schleife mit Endpunkt x_0. Aus (1) erhalten wir dann eine Schleifenhomotopie $h : [0,2]\times[0,1]$ von $v * w^{\text{rev}}$ zu einer konstanten Schleife c_y an einem Punkt y, der aber mit v und w nichts zu tun haben muss.

Als erstes extrahieren wir aus h Weghomotopien von v und w zu c_y:

$$\begin{aligned} h_v : [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow U \\ (s,t) &\longmapsto h(s,t) \\ h_w : [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow U \\ (s,t) &\longmapsto h(2-s,t) \end{aligned}$$

Diese lassen allerdings die Endpunkte nicht fix. Um dies zu reparieren, betrachten wir die Wege, die die Endpunkte entlang der Homotopien zurücklegen: Seien $a, b : [0,1] \to U$ definiert als

$$\begin{aligned} a(t) &= h_v(0,t) = h(0,t) = h(2,t) = h_w(0,t) \\ b(t) &= h_v(1,t) = h(1,t) = h_w(1,t). \end{aligned}$$

Wir definieren nun Homotopien $h_u^{\triangleright}$ für $u = v, w$ wie folgt:

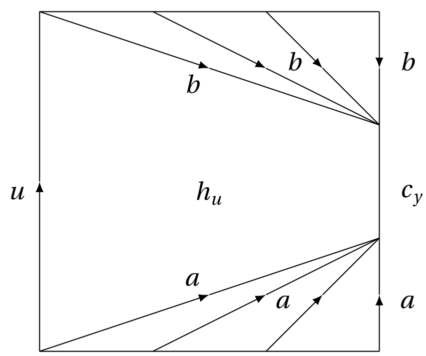
$$\begin{aligned} h_u^{\triangleright} : [0,1]\times[0,1] &\longrightarrow U \\ (s,t) &\longmapsto \begin{cases} b(3(1-s)) & s \ge \frac{2}{3} + \frac{1-t}{3} \\ h_u\left(\frac{1}{2} + \frac{6s-3}{6-4t}, t\right) & \frac{2}{3} + \frac{1-t}{3} > s > \frac{1}{3} - \frac{1-t}{2} \\ a(3s) & s \le \frac{1}{3} - \frac{1-t}{3} \end{cases} \end{aligned}$$

Das ist stetig: Für $t < 1$ ist

$$\begin{aligned}
\lim_{s \nearrow \frac{2}{3}+\frac{1-t}{3}} h_u^{\triangleright}(s,t) &= \lim_{s \nearrow \frac{2}{3}+\frac{1-t}{3}} h_u\left(\frac{1}{2}+\frac{6s-3}{6-4t}, t\right) \\
&= h_u\left(\frac{1}{2}+\frac{6\left(\frac{2}{3}+\frac{1-t}{3}\right)-3}{6-4t}, t\right) \\
&= h_u\left(\frac{1}{2}+\frac{3-2t}{6-4t}, t\right) \\
&= h_u(1,t) \\
&= b(t) \\
&= b\left(3\left(1-\left(\frac{2}{3}+\frac{1-t}{3}\right)\right)\right) \\
&= h_u^{\triangleright}(s,t),
\end{aligned}$$

und analog ist $\lim_{s \searrow \frac{1}{3}-\frac{1-t}{3}} h_u^{\triangleright}(s,t) = h_u^{\triangleright}(\frac{1}{3}-\frac{1-t}{3}, t)$.

Da die Definition von $h_u^{\triangleright}$ vielleicht etwas schwierig zu lesen ist, ist hier noch ein Bild:



Abgebildet ist der Definitionsbereich $[0,1] \times [0,1]$, in obiger Notation läuft s von unten nach oben, t von links nach rechts. Auf dem Trapez in der Mitte haben wir h_u zusammengestaucht, es fängt links bei voller Höhe mit dem Weg u an, und endet rechts mit Höhe $\frac{1}{3}$ mit dem konstanten Weg c_y. Oberhalb und unterhalb davon sind b und a so eingepasst, dass wir eine Homotopie erhalten, die die Endpunkte fix lässt.

Noch bildlicher erhalten wir $h_u^{\triangleright}$ aus h_u, indem wir zum Zeitpunkt t erst entlang a von $x_0 = a(0)$ bis zu $a(t)$ laufen, dann dort $h_u(-,t)$ ablaufen (was von $a(t)$ nach $b(t)$ führt), und dann von $b(t)$ wieder entlang b zurück zu $b(0) = x_1$ gehen.

Es ist also $h_u^{\triangleright}(0,t) = a(0) = x_0$ und $h_u^{\triangleright}(1,t) = b(0) = y_0$ für alle t. Da $h_u^{\triangleright}(-,1) = a * c_y * b^{\mathrm{rev}}$ ist, haben wir also mit $h_v^{\triangleright}$ eine Homotopie relativ Endpunkten von v nach $a * c_y * b^{\mathrm{rev}}$, und mit $h_w^{\triangleright}$ eine Homotopie relativ Endpunkten von w nach $a * c_y * b^{\mathrm{rev}}$. Zusammen ergeben diese dann eine Homotopie $h_v^{\triangleright} * (h_w^{\triangleright})^{\mathrm{rev}}$ relativ Endpunkten zwischen v und w.

Aufgabe 4

1. Wir reduzieren auf den Fall $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\geq 0}$, denn dies ist ein Schlitzgebiet, und von denen wissen wir bereits, dass sie einfach zusammenhängend sind. Zunächst zeigen wir folgende Aussage:

Lemma. *Seien $U, V \subseteq \mathbb{C}$ (oder $\subseteq \mathbb{R}^n$) offen und $f: U \to V$ und $g: V \to U$ zueinander inverse stetige Abbildungen. Dann ist U einfach zusammenhängend genau dann, wenn V einfach zusammenhängend ist.*

Proof. Die Aussage ist symmetrisch, es reicht also zu zeigen, dass U einfach zusammenhängend impliziert, dass V einfach zusammenhängend ist.

Für zwei Punkte x, y in V gibt es einen Weg w in U von $g(x)$ nach $g(y)$. Dann ist $f \circ g$ ein Weg in V von $f(g(x)) = x$ nach $f(g(y)) = y$. Somit ist mit U auch V wegzusammenhängend.

Genauso ist für eine Schleife γ in V auch $g \circ \gamma$ eine Schleife in U. Dann gibt es eine Schleifenhomotopie $h : [0,1] \times [0,1] \to U$ von $g \circ \gamma$ zu einer konstanten Schleife c_z an einem Punkt $z \in U$. Dann ist auch $f \circ h : [0,1] \times [0,1] \to V$ eine Schleifenhomotopie, und zwar von $f \circ g \circ \gamma = \gamma$ zu der konstanten Schleife $c_{f(z)}$ bei $f(z) \in V$. □

In unserem Fall definieren wir zueinander inverse stetige Abbildungen zwischen $\mathbb{C}\backslash\Gamma_f$ und $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ wie folgt:

$$\begin{aligned}
\phi : \mathbb{C}\backslash\Gamma_f &\longrightarrow \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0} \\
x + iy &\longmapsto \begin{cases} x + i(y - f(0)) & x < 0 \\ x + i(y - f(x)) & x \geq 0 \end{cases} \\
\psi : \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0} &\longrightarrow \mathbb{C}\backslash\Gamma_f \\
x + iy &\longmapsto \begin{cases} x + i(y + f(0)) & x < 0 \\ x + i(y + f(x)) & x \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Diese sind wohldefiniert, denn

$$\begin{aligned}
x + iy \in \mathbb{C}\backslash\Gamma_f &\Leftrightarrow \big(x < 0 \vee y \neq f(x)\big) \Leftrightarrow \big(x < 0 \vee y - f(x) \neq 0\big) \Leftrightarrow x + i(y - f(x)) \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0} \\
x + iy \in \mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0} &\Leftrightarrow \big(x < 0 \vee y \neq 0\big) \Leftrightarrow \big(x < 0 \vee y + f(x) \neq f(x)\big) \Leftrightarrow x + i(y + f(x)) \in \mathbb{C}\backslash\Gamma_f
\end{aligned}$$

Die Funktionen sind auch beide stetig: Nur die Stellen mit $x = 0$ könnten Probleme bereiten, aber natürlich ist

$$\begin{aligned}
\lim_{x \nearrow 0} \phi(x + iy) &= \lim_{x \nearrow 0} x + i(y - f(0)) = i(y - f(0)) = \phi(0 + iy) \\
\lim_{x \nearrow 0} \psi(x + iy) &= \lim_{x \nearrow 0} x + i(y + f(0)) = i(y + f(0)) = \psi(0 + iy).
\end{aligned}$$

Weiterhin ist für $x \geq 0$:

$$\begin{aligned}
\psi \circ \phi(x + iy) &= \psi(x + i(y - f(x))) = x + iy \\
\phi \circ \psi(x + iy) &= \psi(x + i(y + f(x))) = x + iy.
\end{aligned}$$

Für $x < 0$ ist analog $\phi \circ \psi(x + iy) = x + iy$ und $\psi \circ \phi(x + iy) = x + iy$, also sind ϕ und ψ zueinander inverse stetige Funktionen und mit unserem Lemma ist $\mathbb{C}\backslash\Gamma_f$ einfach zusammenhängend, weil $\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}_{\geq 0}$ es ist.

2. Die Abgeschlossenheit von K brauchen wir nicht: Sei $x \in K$. Da K beschränkt ist, gibt es $r > 0$ mit $K \subseteq D(x, r)$. Dann ist $\mathbb{C}\backslash D(x, r) \subseteq \mathbb{C}\backslash K$, und

$$\begin{aligned}
\gamma : [0,1] &\longrightarrow \mathbb{C}\backslash D(x, r) \\
t &\longmapsto r \cdot \operatorname{cis}(t \cdot 2\pi i) + x
\end{aligned}$$

ist eine Schleife in $\mathbb{C}\backslash K$. Jede Nullhomotopie h von γ in $\mathbb{C}\backslash K$ wäre dann aber auch eine in $\mathbb{C}\backslash\{x\}$. Aber dann wäre $\frac{h-x}{r}$ eine Nullhomotopie von $\frac{\gamma-x}{r}$ in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$, und $\frac{\gamma-x}{r}(t) = \operatorname{cis}(t \cdot 2\pi i)$ war unser erstes Beispiel für eine Schleife, für die es keine Nullhomotopie in $\mathbb{C}\backslash\{0\}$ gibt. Also kann auch γ in $\mathbb{C}\backslash K$ nicht nullhomotop sein, also ist $\mathbb{C}\backslash K$ nicht einfach zusammenhängend.

3. Wie bereits in der Lösung von Aufgabe 2 versprochen, beweisen wir zunächst folgende Aussage:

Lemma. *Sei $w : [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg und $U, V \subseteq \mathbb{C}$ zwei offene Mengen, sodass das Bild von w in $U \cup V$ liegt. Dann existieren $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ derart, dass das Bild von $w|_{[t_i, t_{i+1}]}$ für jedes $0 \leq i < k$ vollständig in U oder in V liegt.*

Proof. Da w stetig ist, sind $w^{-1}(U)$ und $w^{-1}(V)$ wieder offen in $[0,1]$, d.h., es gibt $A, B \subseteq \mathbb{R}$ offen mit $w^{-1}(U) = A \cap [0,1]$, $w^{-1}(V) = B \cap [0,1]$. Wir können A und B als Vereinigung von offenen Intervallen schreiben. Zusammen geben uns diese beiden Sammlungen von Intervallen dann eine offene Überdeckung von $[0,1]$: Da $[0,1]$ aber kompakt ist, können wir eine endliche Teilüberdeckung finden. Wir fixieren eine solche endliche Teilüberdeckung: Diese besteht also aus endlich vielen Intervallen (x_i, y_i), für die $(x_i, y_i) \cap [0,1]$ komplett in $w^{-1}(U)$ oder $w^{-1}(V)$ liegt, d.h., das Bild von $w|_{(x_i, y_i)}$ liegt komplett in U oder V.

Wir definieren die t_j nun induktiv. Spezifisch zeigen wir: Es gibt $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ sowie $i_0, \ldots, i_{k-1}$, sodass:

- Für jedes $j < k$ ist $[t_j, t_{j+1}] \subseteq (x_{i_j}, y_{i_j})$, also $x_{i_j} < t_j$ und $t_{j+1} < y_{i_j}$
- Zusätzlich ist für jedes $j \geq 1$ noch $y_{i_{j-1}} \leq t_{j+1}$. Insbesondere ist also $y_0 < \cdots < y_{k-1}$.

Wir setzen dafür zunächst $t_0 = 0$ und wählen ein Intervall (x_{i_0}, y_{i_0}), dass 0 enthält.

Falls wir bereits $0 = t_0 < \cdots < t_n < 1$ und $i_0, \ldots, i_n$ gefunden haben, dann gibt es zwei Möglichkeiten:

- Falls $y_{i_n} > 1$ ist, sind wir bereits fertig: Wir können $t_k = t_{n+1} = 1$ setzen, dass ist $x_{i_n} < t_n < 1 = t_{n+1} < y_{i_n}$ und somit $[t_n, t_{n+1}] \subseteq (x_{i_n}, y_{i_n})$.
- Falls $y_{i_n} \leq 1$, so ist $y_{i_n} \in [0,1]$ in keinem der bisherigen Intervalle mit Index i_0 bis i_n enthalten: Es muss also ein weiteres Intervall $(x_{i_{n+1}}, y_{i_{n+1}})$ geben, das y_{i_n} enthält.

  Es ist also insbesondere $x_{i_{n+1}} < y_{i_n}$, sowie aus dem vorherigen Schritt $t_n < y_{i_n}$. Wir wählen dann t_{n+1} so, dass
  $$\max(x_{i_{n+1}}, t_n) < t_{n+1} < y_{i_n} \leq 1.$$
  Dann ist $[t_n, t_{n+1}] \subseteq ((x_{i_{n+1}}, y_{i_{n+1}})$, und wir können den nächsten Schritt machen.

Da in jedem Schritt ein neues Intervall dazugenommen wird, muss dieser Prozess in endlich vielen Schritten enden, damit haben wir unsere gesuchten $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ gefunden. $\square$

Seien nun U, V wie in der Aufgabe, und $w : [0,1] \to U \cup V$ eine Schleife. Mit dem Lemma wählen wir $0 = t_0 < \cdots < t_k = 1$ derart, dass $w|_{[t_j, t_{j+1}]}$ für alle $0 \leq j < k$ vollständig in U oder V enthalten ist. Wir können annehmen, dass die Bilder der Intervalle abwechselnd in U und V liegen: Falls $w|_{[t_j, t_{j+1}]}$ und $w|_{[t_{j+1}, t_{j+2}]}$ beide in U landen, können wir t_{j+1} entfernen, denn $w|_{[t_j, t_{j+2}]}$ landet wieder in U.

Mit dieser Annahme liegt dann $w(t_j) \in U \cap V$ für alle $0 < j < k$. (Es ist möglich, aber nicht garantiert, dass $w(t_0) = w(0) = w(1) = w(t_k)$ ebenfalls in $U \cap V$ liegen.) Da $U \cap V$ offen und zusammenhängend ist, ist es auch wegzusammenhängend. Wir können also für alle j, für die sowohl $w(t_j)$ als auch $w(t_{j+1})$ in $U \cap V$ liegen, einen Weg $v_j : [t_j, t_{j+1}] \to U \cap V$ von $w(t_j)$ nach $w(t_{j+1})$ finden. Wir haben also zwei Wege $w|_{[t_j, t_{j+1}]}$ sowie v_j, die die gleichen Start- und Endpunkte haben und beide vollständig in U oder beide vollständig in V liegen. Da U und V einfach zusammenhängend sind, folgt mit Aufgabe 3, dass es eine Homotopie relativ Endpunkten von $w|_{[t_j, t_{j+1}]}$ nach v_j gibt.

Für $w(0) = w(1)$ gibt es nun zwei Fälle:

- $w(0) = w(1) \in U \setminus V$ oder $w(0) = w(1) \in V \setminus U$: Dann ist unsere Schleife
  $$w = w|_{[t_0, t_1]} * \left(\mathop{\Huge *}_{0 < j < k-1} w|_{[t_j, t_{j+1}]} \right) * w|_{[t_{k-1}, t_k]}$$
  vermöge unserer Homotopien homotop zu der Schleife
  $$w|_{[t_0, t_1]} * \left(\mathop{\Huge *}_{0 < j < k-1} v_j \right) * w|_{[t_{k-1}, t_k]},$$
  die nun aber vollständig in U bzw. V liegt. Da diese einfach zusammenhängend sind, ist diese Schleife nullhomotop, und somit auch w.
- Falls $w(0) = w(1) \in U \cap V$ liegen, ist unsere Schleife
  $$w = \mathop{\Huge *}_{0 \leq j \leq k-1} w|_{[t_j, t_{j+1}]}$$
  homotop zu der Schleife
  $$\mathop{\Huge *}_{0 \leq j \leq k-1} v_j,$$
  die nun sogar vollständig in $U \cap V$, also insbesondere in U und in V liegt, also ebenfalls nullhomotop ist, und somit auch w.