Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\lim_{r\to\infty}\int_{[0,r(1+i)]} e^{-z^2}\mathrm{d}z = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

gilt und leiten Sie die Fresnel'schen Integrale

$$\int_0^\infty \cos(x^2)\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \int_0^\infty \sin(x^2)\mathrm{d}x$$

daraus ab.

Hinweis: Benutzen Sie das Goursat'sche Lemma um die erste Aussage auf das hoffentlich bekannte Gauß'sche Integral $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ zurückzuführen.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass es zu jedem Weg $w\colon[0,1]\to\mathbb{C}\setminus\{0\}$ einen Weg $v\colon[0,1]\to\mathbb{C}$ gibt mit $\exp\circ v = w$. Folgern Sie, dass jede Schleife in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ zu einer der Schleifen

$$[0,1]\longrightarrow\mathbb{C}\setminus\{0\},\quad t\longmapsto \mathrm{cis}(2n\pi t)$$

mit $n\in\mathbb{Z}$ homotop ist.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass für $U\subseteq\mathbb{R}^n$ offen und zusammenhängend folgende Bedingungen äquivalent sind:

1. Jede Schleife in U ist homotop durch Schleifen zu einer konstanten Schleife
2. Je zwei Wege in U mit gleichem Start- und Endpunkt sind homotop relativ ihrer Enden.

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jede stetige Funktion $f\colon\mathbb{R}_{\geq 0}\to\mathbb{R}$ ist $\mathbb{C}\setminus\Gamma_f$ einfach zusammenhängend, wo Γ_f den Graphen von f bezeichnet.
2. Für $\emptyset\neq K\subseteq\mathbb{C}$ abgeschlossen und beschränkt ist $\mathbb{C}\setminus K$ nie einfach zusammenhängend.
3. Sind $U, V\subseteq\mathbb{C}$ offen und einfach zusammenhängend und $U\cap V$ ist nicht leer und zusammenhängend, so ist auch $U\cup V$ einfach zusammenhängend.