Ist $F \in \mathcal{A}_0$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, $x \in \mathbb{C}$ und $w\colon [0,1] \to \mathbb{C}$ ein Weg mit $w(0) = x$, so besteht eine *analytische Fortsetzung* von (F, x) entlang w aus einer Unterteilung $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < t_n = 1$, Zahlen $\epsilon_i > 0$ und analytischen Funktionen $f_i\colon \mathrm{D}(w(t_i), \epsilon_i) \to \mathbb{C}$, derart dass gilt:

1. $\mathrm{T}_x f_0 = F$
2. $w_{|[t_i, t_{i+1}]}$ liegt in $\mathrm{D}(w(t_i), \epsilon_i) \cup \mathrm{D}(w(t_{i+1}), \epsilon_{i+1})$
3. $f_i(z) = f_{i+1}(z)$ für alle $z \in \mathrm{D}(w(t_i), \epsilon_i) \cap \mathrm{D}(w(t_{i+1}), \epsilon_{i+1})$.

Man sagt, dass (F, x) in einem Gebiet U mit $x \in U$ *uneingeschränkt* analytische Fortsetzung entlang von Wegen erlaubt, wenn jeder Weg $w\colon [0,1] \to U$ mit $w(0) = x$ eine analytische Fortsetzung von (F, x) zulässt.

Aufgabe 1 (5 Punkte)

Zeigen Sie in dieser Situation:

1. Die Funktion $F_w\colon [0,1] \to \mathbb{C}$, die t auf $f_i(w(t))$ schickt, wenn $t_{i-1} \le t \le t_{i+1}$ und $w(t) \in \mathrm{D}(w(t_i), \epsilon)$ gelten, wohldefiniert und unabhängig von der Wahl der t_i, ϵ_i und f_i.
2. Besitzt (F, x) uneingeschränkt analytische Fortsetzungen in U, so gilt $F_w(1) = F_{\widetilde{w}}(1)$ für jeden zu $w\colon [0,1] \to U$ in U relativ Endpunkten homotopen Weg $\widetilde{w}\colon [0,1] \to U$.
3. Ist $U \subseteq \mathbb{C}$ einfach zusammenhängend und besitzt (F, x) in U uneingeschränkt analytische Fortsetzung entlang von Wegen, so gibt es genau eine analytische Abbildung $f\colon U \to \mathbb{C}$ mit $\mathrm{T}_x f = F$.

Hinweis: Imitieren Sie für 2., den sogenannten Monodromiesatz, den Beweis des Cauchy'schen Integralsatzes.

Aufgabe 2 (5 Punkte)

Zeigen Sie, dass die (Taylorreihe der) Funktion

$$g\colon \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{<0} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad z \longmapsto \frac{1}{\ln(z) - 2\pi i}$$

um den Punkt 1 nicht uneingeschränkt analytisch auf Wege in $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ fortgesetzt werden kann, obwohl $\mathrm{D}_g = \mathbb{C}\setminus\{0\}$ gilt.

Aufgabe 3 (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{\cos(z)}{z}\mathrm{d}z, \quad \int_\gamma \frac{\sin(z)}{z}\mathrm{d}z, \quad \int_\gamma \frac{\cos(z)}{\sin(z)}\mathrm{d}z \quad \text{und} \quad \int_\gamma \frac{\sin(z)}{\cos(z)}\mathrm{d}z,$$

für

$$\gamma\colon [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{C} \setminus \{0\}, \quad t \longmapsto \mathrm{cis}(t).$$

Aufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie:

1. Für jedes nicht konstante Polynom $P \in \mathbb{C}[T]$ gilt $|P(z)| \to \infty$ bei $|z| \to \infty$.
2. Ist $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $|f(z)| \to \infty$ bei $|z| \to \infty$, dann ist f ein komplexes Polynom.

Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ um zu sehen dass es ein $n \in \mathbb{N}$ derart gibt, dass $\frac{f(z)}{z^n}$ bei $|z| \to \infty$ konvergiert. Bringen Sie diese Information dann in die Taylorentwicklung von f um 0 ein.